

К ВОПРОСУ ОБРАЗОВАНИЯ ВМЯТИН В СЖАТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ

Вопросы об устойчивости цилиндрических оболочек в "малом" при осевом сжатии сводится к решению системы уравнений [1]

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 W &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{q_z}{h}; \\ \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{4} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \end{aligned} \quad (1)$$

при соответствующих граничных условиях.

Здесь W , Φ — соответственно функция прогиба и напряжения.

Известно, что характер выпучивания реальных оболочек не соответствует формам равновесия при исследовании потери устойчивости в "малом". И прежде всего потому, что вмятины при реальном выпучивании занимают не всю поверхность оболочки, как это должно следовать из решения [1, 2].

В настоящей работе на основании представления оболочки как совокупности полосок на упругом основании показано, что потеря устойчивости в "малом" происходит с образованием отдельных вмятин, которые затем развиваются самопроизвольно, т.е. при падающей кривой равновесных состояний, что соответствует возможности потери устойчивости в "большом".

Итак, пусть цилиндрическая оболочка сжата вдоль образующей — сжимающее напряжение — p . Пусть на некоторой части цилиндрической поверхности образовалась круговая полоса вмятин, а на остальной части они отсутствуют. Естественно предположить, что на этой части поверхности функции W и Φ не зависят от дуговой координаты u . Тогда система (1) сводится к одному разрешающему уравнению, соответствующему балочке на упругом основании

$$\frac{D}{h} \frac{d^4 W}{dz^4} + p \frac{d^2 W}{dz^2} + \frac{E}{R^2} W = 0. \quad (2)$$

В поясе, где образовались вмятины, используя обычную процедуру отыскания функции напряжений [1], приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 W(z,y)}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 W(z,y)}{\partial z^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W(z,y)}{\partial y^4} &= -\frac{h}{D} \left[\frac{1}{R} \frac{a}{c} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \Phi(z) \frac{a}{c} + \right. \\ &\left. + \Phi^{IV}(z) \frac{b}{c} \right] \varphi(y) - p \frac{\partial^2 W(z,y)}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Далее, принимая в качестве решения функцию

$$W(z, y) = W(z) \sin \frac{my}{R}$$

и интегрируя по координате y , например, методом Бубнова-Голеркина, получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d^4 W(z)}{dz^4} + \left(p \frac{h}{D} - 2 \frac{m^2}{R^2} + \frac{haE}{\pi DR^2 c_0} \int_0^{2\pi R} \varphi(y) \sin \frac{my}{R} dy \right) \frac{d^2 W(z)}{dz^2} + \\ + \frac{m^4}{R^4} W(z) = - \frac{h}{D} \left[\Phi(z) \frac{a}{c} + \Phi^{IV}(z) \frac{b}{c} \right] \int_0^{2\pi R} \varphi(y) \sin \frac{my}{R} dy, \end{aligned} \quad (3)$$

т.е. и в этом случае имеем уравнение, соответствующее балке на упругом основании, но с правой частью, смысл которой будет обсужден ниже. Итак, фактически задача свелась к совместному решению двух уравнений при выполнении граничных условий и условий сопряжения.

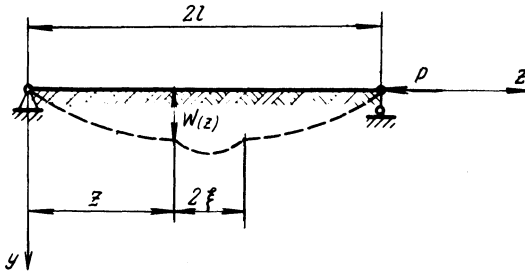


Рис. 1. Балка на упругом основании.

Для большей ясности вместо оболочки будем рассматривать качественно эквивалентную балку длины $2l$ на упругом основании (рис. 1). Однако основание наделим свойством обладать двумя значениями коэффициента постели c и ϵc ($\epsilon < 1$), причем основание работает с коэффициентом постели ϵc лишь тогда, когда погонное усилие на основание достигает некоторой величины c_0 . Положим, что балочка, сжатая продольной силой P , выпучивается. Возможно предположить две формы выпучивания:

первая, когда основание работает только с коэффициентом постели c , в этом случае балка изогнется по одной полуволне, что соответствует осесимметричной потере устойчивости оболочки;

вторая — с образованием в некоторой зоне 2ξ вмятин, где основание будет работать с коэффициентом постели ϵc , а в остальной части — в соответствии с первым случаем. Будем считать, что вмятина образовалась в середине балки, тогда форма прогиба опишется двумя уравнениями:

$$W^{IV} + \frac{pl^2}{EI} W'' + \frac{cl^4}{EI} W = 0, \quad \begin{cases} 0 \leq z < 1 - \xi, \\ 1 + \xi, < z \leq 2l; \end{cases}$$

$$W^{IV} + \frac{pl^2}{EI} W'' + \epsilon \frac{cl^4}{EI} W = -\frac{c_0 l^3}{EI}; \quad 1 - \xi; z \leq 1 + \xi, \quad (4)$$

Граничные условия и условия сопряжения понятны из рис. 1. Очевидно, что задача (4) качественно эквивалентна (2) и (3). Вводя обозначения

$$K^2 = \frac{pl^2}{EI}; \quad r = \frac{cl^4}{EI} \quad \alpha = \sqrt{\frac{K^2}{2} + \sqrt{\frac{K^4}{4} - r}};$$

$$\beta = \sqrt{\frac{K^2}{2} - \sqrt{\frac{K^4}{4} - r}}; \quad \lambda = \sqrt{\frac{K^2}{2} + \sqrt{\frac{K^4}{4} - \epsilon r}};$$

$$\mu = \sqrt{\frac{K^2}{2} - \sqrt{\frac{K^4}{4} - \epsilon r}}.$$

С учетом граничных условий и симметрии получим

$$W = A_2 \sin \alpha z + A_4 \sin \beta z \quad \begin{cases} 0 \leq z < 1 - \xi; \\ 1 + \xi, < z \leq 2l; \end{cases}$$

$$W = B_2 \frac{\cos \lambda (1-z)}{\sin \lambda} + B_4 \frac{\cos \lambda (1-z)}{\sin \mu} \quad \begin{cases} 1 - \xi, \leq z \leq 1 + \xi \end{cases}$$

и учитывая, что при нулевой длине зоны вмятины ($\xi = 0$) коэффициент $A_4 = 0$, примем в силу непрерывности, для малых ξ , $A_4 \equiv 0$. Введем обозначение $A_2 = f$. Тогда из условий гладкости и непрерывности для коэффициентов B_i получим

$$\begin{cases} B_2 = f \sin \lambda \sin \alpha \frac{\mu^2 - \alpha^2}{\mu^2 - \lambda^2} + \frac{c_0}{\epsilon cl} \sin \alpha \frac{\mu^2}{\mu^2 - \lambda^2}; \\ B_4 = f \sin \mu \sin \alpha \frac{\alpha^2 - \lambda^2}{\mu^2 - \lambda^2} - \frac{c_0}{\epsilon cl} \sin \mu \frac{\lambda^2}{\mu^2 - \lambda^2}. \end{cases} \quad (5)$$

Удовлетворим условию равновесия изогнутой балки $-\Sigma Y = 0$, получим уравнение

$$f [K^2 \alpha - \alpha^3 + \frac{r}{\alpha} (\cos \alpha (1 - \xi) - 1)] - \epsilon r \left(\frac{B_2 \sin \lambda \xi}{\lambda \sin \lambda} + \frac{B_4 \sin \mu \xi}{\mu \sin \mu} \right) = 0. \quad (6)$$

Здесь V_2 и V_4 определяются по (5). Уравнение (6) с учетом (2) связывает три величины: амплитуду прогиба f , полудлину зоны вмятины ξ и силовой параметр. Поэтому необходимо еще одно уравнение. Его получим из условия минимума энергии деформирования

$$\Theta = \int_0^{1-\xi} EI W''^2 dz + \int_0^{1-\xi} c W^2 dz + \int_{1-\xi}^1 \epsilon c W^2 dz + 2 \int_{1-\xi}^1 c_0 W dz - P \int_0^1 W^2 dz.$$

Минимизируя энергию, получим уравнение

$$\xi r \frac{c_0}{cl} = -f \frac{\pi^4 g}{16}.$$

Подставляя (7) в (6) с учетом (5), получим уравнение

$$f \left[3(1-a) + \frac{b^2}{1+a} + 2\pi \right] g + 2\pi \left(\frac{b}{1+a} \right)^2 (1-\epsilon) \xi = 0. \quad (8)$$

Здесь a и b — безразмерные положительные величины, связанные с жесткостью основания;

$$g = \frac{P - P_{кр}}{P_3} - \text{безразмерное приращение силового параметра,}$$

отсчитываемого от уровня, соответствующего критической нагрузке при потере устойчивости без вмятины, т.е. верхней критической нагрузке для оболочки.

Анализ уравнения (8) позволяет сделать следующие выводы:

1. Положим, что $\epsilon = 1$. Это будет соответствовать классическому линейному упругому основанию. В этом случае последнее слагаемое в (8) равно нулю. Тогда получим

$$f \left[3(1-a) \frac{b^2}{1+a} + 2\pi \right] g = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется при $f = 0$, что соответствует неизогнутой форме равновесия; и при $f \neq 0$, но $g = 0$. Условие, что $g = 0$, соответствует классическому значению критической нагрузки для балки на упругом основании или оболочки в указанном в начале смысле.

2. Пусть $\epsilon < 1$, тогда по-прежнему возможно выпучивание при $g = 0$, но тогда необходимо, чтобы и $\xi = 0$, т.е. выпучивание происходит без образования вмятины.

3. Кроме того, очевидно, возможен еще один случай выпучивания $f \neq 0$, когда $\xi \neq 0$, но для этого необходимо, чтобы

$$\left[3(1-a) + \frac{b^2}{1+a} + 2\pi \right] g + 2\pi \left(\frac{b}{1+a} \right)^2 (1-\epsilon) \xi = 0.$$

Откуда следует, что выпучивание с вмятиной происходит с уменьшением сжимающего усилия (т.е. при достигнутом уровне критической нагрузки согласно п.2) самопроизвольно.

Действительно, увеличение зоны вмятины ξ связано с отрицательным приращением силового параметра g

$$g = - \frac{2\pi b^2(1-\epsilon)}{(1+a) [3(1-a^2)+b^2+2\pi(1+a)]} \xi.$$

4. Таким образом, полученные результаты вполне согласуются с тем, что одной и той же критической (для оболочки – верхней) нагрузке соответствуют различные формы выпучивания, однако в соответствии с п. 3 выпучивание будет происходить с появлением вмятин в узкой полосе поверхности оболочки, а затем – стремительному нарастанию количества и размеров вмятин.

ЛИТЕРАТУРА

1. В о л ь м и р А.С. Устойчивость упругих систем. – М., 1963. 2. Упругие оболочки/ Под ред. Э.И.Григолюка. – М., 1963.

УДК 621.721 + 621.035

Н.Н.БУТКЕВИЧ, И.Д.БУШИЛО

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ МЕТОДОМ ФОТОУПРУГОСТИ

Изучение температурных напряжений с помощью оптически-чувствительных материалов осуществляется путем моделирования. Основная задача моделирования – установление области подобия, подбор и выполнение для этой области соответствующих критериев подобия. Постановка модельных экспериментов должна удовлетворять критериям подобия, полученным на основе теории подобия и анализа размерностей, а в случае использования оптически-чувствительных материалов дополнительным условием, состоящим в подборе материала модели с необходимыми физико-механическими и оптическими свойствами.

Для моделирования температурных напряжений в однородных материалах при учете подобия граничных условий и геометрии необходимо выполнение следующих критериев подобия:

I. При стационарном тепловом режиме

$$\frac{\alpha l}{\lambda} = \text{idem (Вi – критерий Био)};$$

$$\alpha \epsilon \Delta T = \text{idem (деформационный критерий)}.$$

II. При нестационарном тепловом режиме