

Так, ограничиваясь первым приближением (5),

$$U_{11}^* = A_1, \quad V_{00}^* = (z-a)(z-b)A_2, \quad W_{01}^* = A_3,$$

полагая $\varphi = 1$, $\psi = (z-a)(z-b)$, $f = 1$ и произведя решение векового уравнения на ЭЦВМ М-22 по стандартной программе определения собственных значений матрицы, получим:

$$\omega_1 = 4200 \text{ 1/с}; \quad \omega_2 = 40500 \text{ 1/с}; \quad \omega_3 = 44000 \text{ 1/с}.$$

Ограничиваясь вторым приближением (5),

$$U_{11}^* = A_1 + B_1 z;$$

$$V_{00}^* = (z-a)(z-b)(A_2 + B_2 z);$$

$$W_{01}^* = A_3 + B_3 z.$$

Полагая $\varphi_1 = 1$, $\psi_1 = (z-a)(z-b)$, $f_1 = 1$; $\varphi_2 = z$, $\psi_2 = (z-a)(z-b)z$, $f_2 = z$, аналогично получаем: $\omega_1 = 400 \text{ 1/с}$; $\omega_2 = 5190 \text{ 1/с}$; $\omega_3 = 40550 \text{ 1/с}$; $\omega_4 = 40700 \text{ 1/с}$; $\omega_5 = 44050 \text{ 1/с}$; $\omega_6 = 44050 \text{ 1/с}$.

Ограничиваясь третьим приближением (5), полагая $\varphi_1 = 1$, $\psi_1 = (z-a)(z-b)$, $f_1 = 1$; $\varphi_2 = z$, $\psi_2 = (z-a)(z-b)z$, $f_2 = z$; $\varphi_3 = z^2$, $\psi_3 = (z-a)(z-b)z^2$, $f_3 = z^2$, аналогично получаем:

$$\omega_1 = 370 \text{ 1/с}; \quad \omega_2 = 1004 \text{ 1/с}; \quad \omega_3 = 5300 \text{ 1/с}; \quad \omega_4 = 4055 \text{ 1/с};$$

$$\omega_5 = 41269 \text{ 1/с}; \quad \omega_6 = 41453 \text{ 1/с}; \quad \omega_7 = 44028 \text{ 1/с}; \quad \omega_8 = 44179 \text{ 1/с};$$

$$\omega_9 = 44214 \text{ 1/с}.$$

В статье определены частоты изгибных колебаний рамы автомобиля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушевский А.Е., Шибалева Л.А. Составление дифференциальных уравнений колебаний рамы автомобиля. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1977, вып. 4.

УДК 624.072.2

Н.Ф.БОРИСЕНКО, Э.Г.КОСЫХ

К ВОПРОСУ НЕЛИНЕЙНОГО ИЗГИБА СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЗАГРУЖЕНИЯ

Определение перемещений для тонких стержней в случае произвольного нагружения и переменной жесткости сводится к интегрированию нелинейно-

го интегро-дифференциального уравнения

$$EI(s) \frac{d(\theta - \theta_0)}{ds} = M + P \int_0^s \cos \theta ds + T \int_0^s \sin \theta ds + \int_0^s q(\xi) \int_0^s \cos \theta ds. \quad (1)$$

Здесь $EI(s)$ – изгибная жесткость. Остальные обозначения понятны из рис.1.

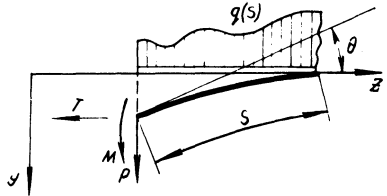


Рис. 1. Схема произвольно нагруженного стержня.

Практическая реализация решения (1) весьма затруднительна, так как уже при $EI = \text{const}$ и действии только сосредоточенной силы решение (1) выражается в эллиптических интегралах. В более общем случае решения в квадратурах не существует. Ниже излагается алгоритм решения, позволяющий достаточно просто реализовать поставленную задачу. Для сокращения выкладок проиллюстрируем методику на частном случае нагружения. Уравнение [1] после интегрирования левой и правой частей сводится в данном случае к виду

$$\theta = \nu_0 \int_0^s I_{s0} \int_1^s \cos \theta ds ds + \theta_0. \quad (2)$$

Здесь $\nu_0 = \frac{P e^2}{EI(0)}$ – силовой безразмерный параметр; $I_{s0} = \frac{I(0)}{I(s)}$ – безразмерная геометрическая характеристика сечения; $\bar{s} = \frac{s}{e}$ – безразмерная координата, черта в (2) и далее опущена.

Введем функцию $\varphi_n(s - \xi)$ [1] такую, что

$$\varphi_1(s - \xi) = \begin{cases} 0 & , s \leq \xi ; \\ \frac{(s - \xi)^n}{n!} & , s > \xi , \end{cases}$$

обладающую свойством $\int_{-\infty}^s \varphi_n ds = \varphi_{n+1}$.

Тогда функция $\theta_0(s)$ при достаточно большом n может быть с любой степенью точности представлена так :

$$\theta_0(s) = \sum_{i=1}^n \theta_0^i [\varphi_0(s - (i-1)h) - \varphi_0(s - ih)] . \quad (3)$$

Здесь $h = \frac{1}{n}$ — шаг разбиения длины стержня на участки, θ_0^i — осредненное на i -м участке значение функции. Очевидно, из (3) следует, что для любой функции $\gamma[\theta_0(s)]$ будет иметь

$$\gamma[\theta_0(s)] = \Sigma \gamma(\theta_0^i) [\varphi_0(s-(i-1)h) - \varphi_0(s-ih)]. \quad (4)$$

Далее, используя идею последовательного нагружения и положив, что силовой параметр ν_0 получил небольшое приращение, например, начиная от нулевого значения, $\Delta\nu_0$, всегда возможно заменить в правой части $\theta(s)$ на $\theta_0(s)$, что с механической точки зрения соответствует расчету по недеформированному состоянию. Вычислив в (2) внутренний интеграл, где $\cos\theta$ представлен с помощью (4), получим

$$\theta_1 = \theta_0 + \Delta\nu_0 \int_0^s \left\{ \sum_j \cos\theta_0^j I_{j0} [\varphi_1(s-(j-1)h) - \varphi_1(s-jh)] - h \sum_j I_{j0} \sum_{i=1}^n \cos\theta_0^i [\varphi_0(s-(j-1)h) - \varphi_0(s-jh)] \right\} ds$$

или, меняя порядок суммирования и интегрируя еще раз, получим

$$\theta_1 = \theta_0 + \Delta\nu_0 \sum_j \cos\theta_0^j \left\{ I_{j0} [\varphi_2(s-(j-1)h) - \varphi_2(s-jh)] \right\} - h \Delta\nu_0 \sum_{i=1}^n \cos\theta_0^i \left\{ \Sigma I_{j0} [\varphi_1(s-(j-1)h) - \varphi_1(s-jh)] \right\}.$$

Осредняя величину θ_1 на каждом из участков, получим

$$\theta_1^j = \frac{1}{h} \Delta\nu_0 \int_{(j-1)h}^{jh} \theta_1 ds = \theta_0^j + \frac{1}{6} \Delta\nu_0 h^2 [I_{j0} \cos\theta_0^j + 6 \sum_{i=1}^{j-1} (j-i) I_{i0} \cos\theta_0^i] - \frac{1}{2} \Delta\nu_0 h^2 \left[\left(\sum_{i=1}^n \cos\theta_0^i \right) (I_{j0} + 2 \sum_{i=1}^{j-1} I_{i0}) \right].$$

В частном случае $EI = \text{const}$, т.е. $I_{j0} = 1$, получим

$$\theta_1^j = \theta_0^j + \frac{1}{6} \Delta\nu_0 h^2 [\cos\theta_0^j + 6 \sum_{i=1}^{j-1} (j-i) \cos\theta_0^i] - \frac{1}{2} \Delta\nu_0 h^2 [1+2(j-1)] \times \sum_{i=1}^n \cos\theta_0^i.$$

Значение θ_1 можно принять за исходное при очередном этапе нагружения. Принимая темп нагружения постоянным, т.е., полагая $\Delta\nu_0 = \text{const}$, получим рекуррентное соотношение

$$\theta_{\kappa}^j = \theta_{\kappa-1}^j + \frac{\Delta\nu_0 h^2}{6} [I_{j0} \cos\theta_{\kappa-1}^j + 6 \sum_{i=1}^n (j-i) I_{i0} \cos\theta_{\kappa-1}^i] - \frac{\Delta\nu_0 h^2}{2} [I_{j0} + 2 \sum_{i=1}^{j-1} I_{i0}] \sum_{i=1}^n \cos\theta_{\kappa-1}^i, \quad (5)$$

которое решает задачу изгиба при произвольной начальной погиби и законе изменения жесткости. Действительно, учитывая, что

$$dy = \sin\theta ds \text{ и } dz = \cos\theta ds,$$

для перемещений узловых точек стержня получим

$$y_j = \sum_{i=1}^j \sin\theta_{\kappa}^i [\varphi_1(d - (i-1)h) - \varphi_1(s - ih)];$$

$$y_j = \sum_{i=1}^j \cos\theta_{\kappa}^i [\varphi_1(s - (i-1)h) - \varphi_1(s - ih)].$$

Для оценки точности решения согласно (5) были проведены прямые сопоставления с точным решением. Во-первых, сравним линейные решения. Пусть начальная форма погиби будет

$$\theta_0 = 0,3(s - \frac{1}{2}s^2),$$

что соответствует точному решению линейного дифференциального уравнения изгиба стержня постоянного сечения под действием сосредоточенной на конце стержня силы, действующей по оси y (рис. 2) и соответствующей зна-

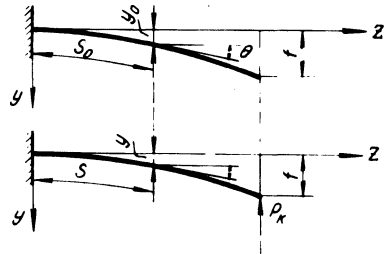


Рис. 2. Схема стержня, нагруженного сосредоточенной силой.

чению силового параметра $\nu_0 = 0,3$. Следовательно, если теперь приложить к торцу стержня силу, как указано на рис. 2, безразмерная величина которой будет равна $\nu_0 = 0,3$, то погибь должна исчезнуть. Действительно, положим в (5) $\Delta\nu_0 = 0,1$. Тогда $k = 3$. Примем $n = 3$. Для линейной задачи, полагая в (5), $\cos\theta^j = 1$, вместо (5), $\cos\theta^j = 1$, вместо (5) имеем

$$\theta_{\kappa}^j = \theta_{\kappa-1}^j + \frac{\Delta\nu_0 h^2}{6} [I_{j0} + 6 \sum_{i=1}^{j-1} (j-i) I_{i0}] - \frac{\Delta\nu_0 h^2}{2} [I_{j0} + 2 \sum_{i=1}^{j-1} I_{i0}] n. \quad (6)$$

Произведя подсчет, убедимся, что $\theta_3^1 = \theta_3^2 = \theta_3^3 = 0$, т.е. используемая в расчете модель работает эквивалентно срѣзною. Сравнение значений θ_3^j с точным решением нелинейной задачи в данном случае дает совпадение пяти цифр после запятой $\theta_3^1 = 0,00002$, $\theta_3^2 = 0,00011$, $\theta_3^3 = 0,00028$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю.Н. Сопротивление материалов. — М., 1962.

УДК 624.072.21

И.Н.ЛИТВИНЕНКО, Е.Г.РОДЗЕВИЧ

ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ СО СЛОЖНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СИЛАМИ

При решении задачи устойчивости тонкостенной складчатой системы с привлечением метода членения ее на продольную и поперечную приходится решать вспомогательную задачу устойчивости стержня поперечной рамы [1]. Продольный изгиб стержня описывается уравнением [2]

$$\frac{d^4 w}{ds^4} + \frac{N + \int_0^s q(\bar{s}) d\bar{s}}{EI} \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{q(s)}{EI} \frac{dw}{ds} = 0, \tag{1}$$

где $q(s) = \frac{p}{l} (b + 2c \frac{s}{l} + 3d \frac{s^2}{l^2})$; $N = pa$; a, b, c — постоянные коэффициенты; p — параметр нагрузки; l — длина стержня.

Предлагается решение этого уравнения двумя приближенными методами: в конечных разностях и разложением функции прогибов на основную и добавочную. В данной статье рассматривается подробно второй метод. Он может быть использован как самостоятельный, так и для контроля решения другими методами.

Записываем функцию прогибов в виде

$$w = w_0 + w_g. \tag{2}$$

Основную функцию подчиняем уравнению

$$\frac{d^4 w_0}{ds^4} + \frac{pa}{EI} \frac{d^2 w_0}{ds^2} + \frac{pb}{EI} \frac{dw_0}{ds} = 0, \tag{3}$$

которое является частью уравнения (1), с учетом выражения (2).

Решение уравнения (3) находим с помощью подстановки Эйлера

$$w_0 = \sum_{n=1}^{n=4} A_n e^{k_n s}, \tag{4}$$