можно построить графики напряжений (рис. 1), определяемые многочленом $i = к = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б о й к о Н.Я. К вопросу о равновесии упругого параллелепипеда при частных видах нагрузки. – В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1975, вып. 2. 2. Б о й к о Н.Я. Сжатие упругого параллелепипеда при действии на него полного и усеченного жесткого клинообразного штампа. – В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1978, вып. 5. 3. К р у ш е в с к и й А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. – Мн., 1967.

УДК 621.81:539.4

Л.А.ШИБАЕВА

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ РАМЫ АВТОМОБИЛЯ

Ранее была получена система дифференциальных уравнений колебаний рамы автомобиля на основе вариационного принципа Лагранжа [1] в виде 12 уравнений в частных производных.

Полагая, что центры тяжести всех сечений рамы располагаются на прямой (ось OZ), можно выделить независимую группу трех уравнений, описывающих ее деформации в вертикальной плоскости YOZ:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z}\left(I_{22} \frac{\partial U_{11}}{\partial z}\right) - (\gamma I_{02} + I_{20}) U_{11} - \gamma_2 I_{02} \frac{\partial W_{01}}{\partial z} - \frac{\rho}{G} I_{22} \frac{\partial^2 U_{11}}{\partial t^2} + \\
&+ \frac{P_4}{G} = 0 ; \\
&\frac{\partial}{\partial z} \left(I_{00} \frac{\partial V_{00}}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z} (I_{00} W_{01}) - \frac{\rho}{G} I_{00} \frac{\partial^2 V_{00}}{\partial t^2} + \frac{Q_1}{G} = 0 ; \\
&\frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma I_{02} \frac{\partial W_{01}}{\partial z} + \gamma_2 I_{02} U_{11}\right) - I_{00}\left(\frac{\partial V_{00}}{\partial z} + W_{01}\right) - \\
&- \frac{\rho}{G} I_{02} \frac{\partial^2 W_{01}}{\partial t^2} + \frac{N_3}{G} = 0.
\end{aligned}\right. \qquad (1)$$

$$\gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} ; \quad \gamma_2 = \frac{2\nu}{1-2\nu} ; \quad I_{20} = \int_F x^2 dF ;$$

$$I_{00} = \int_F dF ; \quad I_{02} = \int_F y^2 dF ; \quad I_{22} = \int_F x^2 y^2 dF .$$

Здесь ρ – плотность материала рамы; G – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона.

Применяя метод Галеркина и представляя упругие перемещения вдоль осей координат в виде

$$\left.\begin{aligned} u &= xyU_{11}(z_1\ t)\ ; \\ v &= V_{02}\ (z, t)\ ; \\ w &= yW_{01}\ (z, t)\ , \end{aligned}\right\}\quad (2)$$

где $U_{11}(z, t)$, $V_{00}(z, t)$, $W_{01}(z, t)$ обобщенные перемещения (поперечная депланация), прогиб, угол поворота сечения в плоскости YOZ, можно получить уравнения собственных колебаний рамы автомобиля в вертикальной плоскости:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dz}\left(I_{22}\frac{dU^*_{11}}{dz}\right) - \left[(\gamma I_{02} + I_{20}) - \frac{\rho\omega^2}{G} I_{22}\right]U^*_{11} - \gamma_2 I_{02}\frac{dW^*_{01}}{dz} = 0; \\ &\frac{d}{dz}\left[I_{00}\left(\frac{dV^*_{00}}{dz} + W^*_{01}\right)\right] + \frac{\rho}{G} I_{00}\omega^2 V^*_{00} = 0\ ; \\ &\frac{d}{dz}\left[\gamma I_{02}\left(\frac{dW^*_{01}}{dz} + U^*_{11}\right)\right] - I_{00}\frac{dV^*_{00}}{dz} - \left(I_{00} - \frac{\rho}{G} I_{02}\omega^2\right)W^*_{01} = 0, \end{aligned}\right\}\quad (3)$$

если обобщенные перемещения представить в виде:

$$\left.\begin{aligned} U_{11} &= U^*_{11}(z)\sin(\omega t + \alpha)\ ; \\ V_{00} &= V^*_{00}\ (z)\sin(\omega t + \alpha)\ ; \\ W_{01} &= W^*_{01}\ (z)\sin(\omega t + \alpha)\ . \end{aligned}\right\}\quad (4)$$

При этом $U^*_{11}(z)$, $V^*_{00}\ (z)$, $W^*_{01}\ (z)$ будем подбирать так, чтобы они удовлетворяли условиям наложенных связей. Так, например, для лонжеронной рамы грузового автомобиля ГАЗ-53, выполненной из стали 25-ПС и состоящей из двух лонжеронов (рис. 1) с опорами в точках А и В (крепления передней и задней подвесок), допускающими свободный поворот сечения и депланацию при прогибе, равном нулю, функции $U^*_{11}\ (z)$, $V^*_{00}\ (z)$, $W^*_{01}\ (z)$ можно представить с помощью степенных рядов

$$\left.\begin{aligned} U^*_{11} &= A_1 + B_1 z + C_1 z^2 + \ldots\ ; \\ V^*_{00} &= (z\ - a)\ (z\ - b)\ (A_2 + B_2 z + C_2 z^2 + \ldots)\ ; \\ W^*_{01} &= A_3 + B_3 z + C_3 z^2 + \ldots \end{aligned}\right\}\quad (5)$$

при выполнении статических условий для сечений, свободных от напряжений

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \;\; \text{и} \;\; z = l; \tag{6}$$

$a = 0{,}826$ м; $b = 4{,}526$ м; $l = 5{,}851$ м; $h = 0{,}22$ м ;
$d = 0{,}43$ м ; $c = 0{,}36$ м ; $\delta = 0{,}01$ м ;
$I_{00} = 68 \; 10^{-4}$ м^2 ; $I_{20} = 1161 \; 10^{-6}$ м^4 ; $I_{02} = 44{,}22 \; 10^{-6}$ м^4 ;
$I_{22} = 7{,}24 \; 10^{-6}$ м^6 ; $\nu = 0{,}3$; $\gamma = 3{,}5$; $\gamma_2 = 1{,}5$;
$\rho = 783$ кгс^2/м^4 ; $G = 8{,}34 \; 10^9$ кг/м^2 .

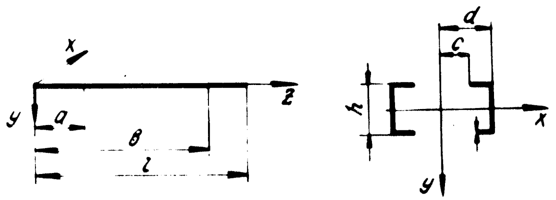

Рис. 1. Расчетная схема рамы автомобиля.

Представляя напряжения через компоненты перемещения

$$\tau_{xz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) ; \quad \tau_{xz} = Gxy\frac{\partial U_{11}}{\partial z} ;$$

$$\tau_{yz} = G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) ; \quad \tau_{yz} = G\left(\frac{\partial V_{00}}{\partial z} + W_{01}\right) ;$$

$$\sigma_z = \gamma G\frac{\partial w}{\partial z} + \gamma_2 G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) ; \quad \sigma_z = \gamma G y\frac{\partial W_{01}}{\partial z} + \gamma_2 G y U_{11}$$

и учитывая (6), будем иметь при $z = 0$ и $z = l$:

$$\frac{dU^*_{11}}{dz} = 0 ; \quad (7) \qquad \frac{dV^*_{00}}{dz} + W^*_{01} = 0 ; \quad (8) \qquad \gamma\frac{dW^*_{01}}{dz} + \gamma_2 U^*_{11} = 0. \quad (9)$$

Подставляя (5) в (3), умножая последние соответственно на $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и $f(z)$ и интегрируя по длине с учетом (7), (8), (9), получим систему совместных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ ..., допускающую решение, отличное от нуля, при равенстве определителя системы нулю.

Тогда получим уравнение частот собственных колебаний рассматриваемой рамы автомобиля.

Так, ограничиваясь первым приближением (5),

$$U_{11}^{*} = A_1,\ V_{00}^{*} = (z-a)(z-b)A_2,\ W_{01}^{*} = A_3,$$

полагая $\varphi = 1$, $\psi = (z-a)(z-b)$, $f = 1$ и произведя решение векового уравнения на ЭЦВМ М-22 по стандартной программе определения собственных значений матрицы, получим:

$$\omega_1 = 4200\ 1/c;\quad \omega_2 = 40500\ 1/c;\quad \omega_3 = 44000\ 1/c.$$

Ограничиваясь вторым приближением (5),

$$U_{11}^{*} = A_1 + B_1 z;$$

$$V_{00}^{*} = (z-a)(z-b)(A_2 + B_2 z);$$

$$W_{01}^{*} = A_3 + B_3 z.$$

Полагая $\varphi_1 = 1$, $\psi_1 = (z-a)(z-b)$, $f_1 = 1$; $\varphi_2 = z$, $\psi_2 = (z-a)(z-b)z$, $f_2 = z$,

аналогично получаем: $\omega_1 = 400\ 1/c$; $\omega_2 = 5190\ 1/c$; $\omega_3 = 40550\ 1/c$; $\omega_4 = 40700\ 1/c$; $\omega_5 = 44050\ 1/c$; $\omega_6 = 44050\ 1/c$.

Ограничиваясь третьим приближением (5), полагая $\varphi_1 = 1$, $\psi_1 = (z-a)(z-b)$, $f_1 = 1$; $\varphi_2 = z$, $\psi_2 = (z-a)(z-b)z$, $f_2 = z$; $\varphi_3 = z^2$, $\psi_3 = (z-a)(z-b)z^2$, $f_3 = z^2$, аналогично получаем:

$$\omega_1 = 370\ 1/c;\ \omega_2 = 1004\ 1/c;\ \omega_3 = 5300\ 1/c;\ \omega_4 = 4055\ 1/c;$$
$$\omega_5 = 41269\ 1/c;\ \omega_6 = 41453\ 1/c;\ \omega_7 = 44028\ 1/c;\ \omega_8 = 44179\ 1/c;$$
$$\omega_9 = 44214\ 1/c.$$

В статье определены частоты изгибных колебаний рамы автомобиля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушевский А.Е., Шибаева Л.А. Составление дифференциальных уравнений колебаний рамы автомобиля. – В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1977, вып. 4.

УДК 624.072.2

Н.Ф.БОРИСЕНКО, Э.Г.КОСЫХ

К ВОПРОСУ НЕЛИНЕЙНОГО ИЗГИБА СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЗАГРУЖЕНИЯ

Определение перемещений для тонких стержней в случае произвольного нагружения и переменной жесткости сводится к интегрированию нелинейно-