

1. Ионов В.Н., Огибалов П.М. Прочность пространственных элементов конструкций. — М., 1972. 2. Крушевский А.Е., Севиенюк А.З. Приближенное определение спектра частот продольных колебаний упругого параллелепипеда при точном выполнении краевых условий на его четырех гранях. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1978, вып. 5. 3. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. — Мн., 1967.

УДК 539.3

Н.Я.БОЙКО

**СЖАТИЕ ЖЕСТКИМ ШЕРОХОВАТЫМ ПЛОСКИМ ШТАМПОМ
УПРУГОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА,
ЧЕТЫРЕ ГРАНИ КОТОРОГО НАХОДЯТСЯ В ЖЕСТКИХ
ШЕРОХОВАТЫХ НАПРАВЛЯЮЩИХ**

Имеем следующие краевые условия для рассматриваемого упругого параллелепипеда:

$$\begin{aligned} \text{при } z = \pm \frac{h}{2} \quad w &= \mp \frac{\epsilon}{2} 0; \\ \tau_{xz} &= -H_1 x; \\ \tau_{yz} &= -H_2 y; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{при } y = \pm \frac{b}{2} \quad v &= 0; \\ \tau_{zy} &= B_2 z; \\ \tau_{xy} &= -B_1 x; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{при } x = \pm \frac{a}{2} \quad u &= 0; \\ \tau_{zx} &= A_2 z; \\ \tau_{yx} &= -A_1 y. \end{aligned} \quad (3)$$

Причем $A_2 = -H_1 \frac{a}{h}$; $A_1 = -B_1 \frac{a}{b}$; $B_2 = -H_2 \frac{b}{h}$ (4)

на основании закона парности касательных напряжений.

Как следует из [1], сформулированную краевую задачу можно решать при помощи рядов:

$$\begin{aligned} u &= U_{00} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) U_{02} + \sum_{k=1}^{\infty} U_{0kc} \cos \left(\frac{2\pi k y}{b} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(12 \frac{z^2}{h^2} - 1 \right) U_2 + \sum_{i=1}^{\infty} [U_{ic0} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) U_{ic2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\kappa=1}^{\infty} U_{i\kappa\kappa c} \cos\left(\frac{2\pi\kappa y}{b}\right) \cos\left(\frac{2\pi iz}{h}\right); \\
v = & \frac{2y}{b} V_{01} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} V_{0\kappa s} \sin\left(\frac{2\pi\kappa y}{b}\right) + \frac{1}{2} \left(12 \frac{z^2}{h^2} - 1\right) V_2 + \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{2y}{b} V_{i\kappa 1} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} V_{i\kappa\kappa s} \sin\left(\frac{2\pi\kappa y}{b}\right) \right] \cos\left(\frac{2\pi iz}{h}\right); \quad (5) \\
w = & \frac{2z}{h} W_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left[W_{is0} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1\right) W_{is2} + \right. \\
& \left. + \sum_{\kappa=1}^{\infty} W_{i\kappa\kappa c} \cos\left(\frac{2\pi\kappa y}{b}\right) \right] \sin\left(\frac{2\pi iz}{h}\right).
\end{aligned}$$

Так же, как и в [2], для определения неизвестных функций от координаты x U_{00} , $U_{0\kappa c}$, $V_{0\kappa s}$, W_{is0} , $U_{i\kappa 0}$, $U_{i\kappa\kappa c}$, $V_{i\kappa\kappa s}$, $W_{i\kappa\kappa c}$ составляют восемь дифференциальных уравнений равновесия внутри объема на основе вариационного уравнения равновесия элементарного столбика тела [3]. Пять неизвестных функций от координаты x V_{01} , U_{02} , $U_{i\kappa 2}$, $V_{i\kappa 1}$, W_{is2} определяются из условия равновесия на гранях $y = \pm \frac{b}{2}$ (2). Из условия равновесия на гранях $z = \pm \frac{h}{2}$ (1) сразу определяются функции W_1 , V_2 , U_2 .

В результате решения вышеотмеченных шестнадцати уравнений и удовлетворения краевых условий (3) получаем следующие выражения для трех компонентов вектора упругих перемещений (1) – (3):

$$\begin{aligned}
u = & Cx + U_{00}^* + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1\right) U_{02} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{z^2}{h^2} - 1\right) U_2 + \\
& + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left[A_{0\kappa} \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi\kappa x}{b}\right) + D_{0\kappa} x \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi\kappa x}{b}\right) \right] \cos\left(\frac{2\pi\kappa y}{b}\right) - \\
& - \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ [B_{i0} - \frac{h(\gamma+1)}{2\pi i(\gamma-1)} C_{i0}] \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi ix}{h}\right) + C_{i0} x \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi ix}{h}\right) \right\} \cos\left(\frac{2\pi iz}{h}\right); \\
v = & - \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left\{ \left[A_{0\kappa} + \frac{(\gamma+1)b}{(\gamma-1)2\pi\kappa} D_{0\kappa} \right] \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi\kappa x}{b}\right) + D_{0\kappa} x \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi\kappa x}{b}\right) - \right. \\
& \left. - V_{0\kappa s}^* \right\} \sin\left(\frac{2\pi\kappa y}{b}\right) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} V_{i\kappa\kappa s}^* \sin\left(\frac{2\pi\kappa y}{b}\right) \cos\left(\frac{2\pi iz}{h}\right); \\
w = & \frac{2z}{h} \left(-\frac{\varepsilon_0}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \frac{bB_2}{6G} z + \sum_{i=1}^{\infty} [B_{i0} \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi ix}{h}\right) +
\end{aligned}$$

$$+ C_{i0} x \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi i x}{h}\right) + W_{is0}^* \sin\left(\frac{2\pi i z}{h}\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{\infty} W_{isks}^* \sin\left(\frac{2\pi i z}{h}\right) \cos\left(\frac{2\pi \kappa y}{b}\right),$$

где $C = -\left(\frac{B_1}{b} + \frac{H_1}{h}\right) \frac{a^2}{12\gamma G}$; $U_{00}^* = \left(\frac{B_1}{b} + \frac{H_1}{h}\right) \frac{x^3}{3\gamma G}$;

$$U_{02} = -\frac{bB_1}{6G} x; \quad U_2 = -\frac{hH_1}{6G} x; \quad \Delta_1 = \operatorname{sh}\left(\frac{\pi \kappa a}{b}\right); \quad \Delta_2 = \operatorname{ch}\left(\frac{\pi \kappa a}{b}\right);$$

$$A_{0\kappa} = \left[\frac{2bB_1}{\pi \kappa} + \frac{(\gamma-1)bA_1\Delta_2}{\gamma\Delta_1} + \frac{(\gamma-1)aB_1\Delta_2}{\gamma\Delta_1} \right] \frac{a \cos(\pi \kappa)}{4G\pi \kappa \Delta_1};$$

$$D_{0\kappa} = -\frac{(\gamma-1) \cos(\pi \kappa)}{2\gamma G \pi \kappa \Delta_1} (bA_1 + aB_1); \quad \Delta_3 = \operatorname{sh}\left(\frac{\pi i a}{h}\right);$$

$$C_{i0} = \frac{(\gamma-1)(aH_1 - hA_2)}{2\gamma G \pi i \Delta_3} \cos(\pi i); \quad \Delta_4 = \operatorname{ch}\left(\frac{\pi i a}{h}\right);$$

$$B_{i0} = -\frac{h[aH_1(\gamma-1) + hA_2(\gamma+1)] \cos(\pi i)}{4\gamma G \pi^2 i^2 \Delta_3} - \frac{(\gamma-1)a\Delta_4(aH_1 - hA_2) \cos(\pi i)}{4\gamma G \pi i \Delta_3^2};$$

$$V_{0\kappa s}^* = \frac{b^2 \cos(\pi \kappa)}{2\gamma G \pi^3 \kappa^3} [(\gamma-1)B_1 + bH_2];$$

$$\Delta_5 = \frac{\pi^2 i^2}{h^2} + \frac{\pi^2 \kappa^2}{b^2}; \quad \Delta_6 = \frac{\pi^2 \kappa^2}{b^2} + \gamma \frac{\pi^2 i^2}{h^2};$$

$$V_{icks}^* = \left[\frac{(\gamma-1)\pi \kappa B_2}{b^2} + \frac{H_2 b \Delta_6}{\pi \kappa h} \right] \frac{\cos(\pi \kappa) \cos(\pi i)}{G \gamma \Delta_5^2};$$

$$W_{is0}^* = \frac{h^2 \cos(\pi i)}{2\gamma G \pi^3 i^3} \left[(\gamma-1)H_1 - \frac{hB_2}{b} \right];$$

$$W_{isks}^* = -\frac{hbV_{icks}^*}{(\gamma-1)\pi i \pi \kappa} \left(\frac{\pi^2 i^2}{h^2} + \gamma \frac{\pi^2 \kappa^2}{b^2} \right) +$$

$$+ \left[hB_2 + \frac{H_2 b}{(\gamma-1)} \right] \frac{b \cos(\pi \kappa)}{G \pi i^2 \kappa^2} \cos(\pi i),$$

$$\text{где } \gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}; \quad \gamma_2 = \frac{2\nu}{1-2\nu};$$

ν — коэффициент Пуассона; G — модуль сдвига.

Полученное решение удовлетворяет уравнениям Ламе.

Постоянные интегрирования A_{0k} , D_{0k} , B_{i0} , C_{i0} определены при удовлетворении краевых условий (3) методом ортогонализации.

Краевые условия (1) и (2) выполняются точно, а (3) — в интегральном виде.

Решение поставленной задачи может быть использовано при исследовании напряженно-деформированного состояния торфяного брикета в упругой стадии при следующих краевых условиях на гранях $z = +\frac{h}{2}$ и $z = 0$:

$$\begin{aligned} \text{при } z = +\frac{h}{2} \quad w = w_z^+ = -\frac{\epsilon_0}{2}; \quad \cdot \\ \tau_{xz} = X_z^+ = -H_1 x; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\tau_{yz} = Y_z^+ = -H_2 y,$$

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0 \quad w = 0; \\ \tau_{xz} = 0; \\ \tau_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Краевые условия на гранях $y = \pm \frac{b}{2}$ и $x = \pm \frac{a}{2}$ те же, т.е. (2) и (3) соответственно.

Наибольший интерес представляет собой изучение нормальных напряжений (боковых давлений) σ_x и σ_y .

Приведем формулы и графики изменения этих напряжений для краевой задачи (2), (3), (7), (8) в зависимости от координат точек и параметров параллелепипеда:

$$\begin{aligned} \sigma_x = G\gamma C - G\gamma_2 \frac{\epsilon_0}{h} + \left(\frac{B_1}{b} + \frac{H_1}{h} \right) x^2 - \frac{B_1 \gamma b}{12} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) + \\ + \gamma_2 \frac{B_2 b}{12} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) - \frac{H_1 \gamma h}{12} \left(12 \frac{z^2}{h^2} - 1 \right) + 2G \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2\pi k}{b} x \right. \\ \left. \times A_{0k} \operatorname{ch} \left(\frac{2\pi k x}{b} \right) + D_{0k} \frac{1}{(\gamma-1)} \operatorname{ch} \left(\frac{2\pi k x}{b} \right) + D_{0k} \frac{2\pi k}{b} \operatorname{sh} \left(\frac{2\pi k x}{b} \right) \right. \\ \left. + \gamma_2 \frac{\pi k}{b} V_{0ks}^* \right] \cos \left(\frac{2\pi k y}{b} \right) + 2G \sum_{i=1}^{\infty} \left[-B_{i0} \frac{2\pi i}{h} \operatorname{ch} \left(\frac{2\pi i x}{h} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\gamma}{(\gamma-1)} C_{i0} \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi i x}{h}\right) - C_{i0} \frac{2\pi i x}{h} \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi i x}{h}\right) + \gamma_2 \frac{\pi i}{h} W_{is0}^* \cos\left(\frac{2\pi i z}{h}\right) + \\
& + G \gamma_2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi \kappa}{b} V_{icks}^* + \frac{2\pi i}{h} W_{iskc}^* \right) \cos\left(\frac{2\pi \kappa y}{b}\right) \cos\left(\frac{2\pi i z}{h}\right); \\
\sigma_y = & G \gamma_2 C - G \gamma_2 \frac{\epsilon_0}{h} + \frac{\gamma_2}{\gamma} \left(\frac{B_1}{b} + \frac{H_1}{h} \right) x^2 - \frac{B_1 \gamma_2 b}{12} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) + \\
& + \gamma_2 \frac{B_2 b}{12} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) - \frac{H_1 \gamma_2 h}{12} \left(12 \frac{z^2}{h^2} - 1 \right) + 2G \sum_{\kappa=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi \kappa y}{b}\right) x \\
& \times \left[-\frac{2\pi \kappa}{b} A_{0\kappa} \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi \kappa x}{b}\right) - \frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)} D_{0\kappa} \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi \kappa x}{b}\right) - D_{0\kappa} \frac{2\pi \kappa x}{b} \times \right. \\
& \times \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi \kappa x}{b}\right) + \gamma \frac{\pi \kappa}{b} V_{0\kappa s}^* \left. \right] + 2G \gamma_2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi i z}{h}\right) \left[\frac{1}{(\gamma-1)} C_{i0} x \right. \\
& \times \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi i x}{h}\right) + \frac{\pi i}{h} W_{is0}^* \left. \right] + G \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\gamma \frac{2\pi \kappa}{b} V_{icks}^* + \gamma_2 \frac{2\pi i}{h} W_{iskc}^* \right) x \\
& \times \cos\left(\frac{2\pi \kappa y}{b}\right) \cos\left(\frac{2\pi i z}{h}\right). \tag{9}
\end{aligned}$$

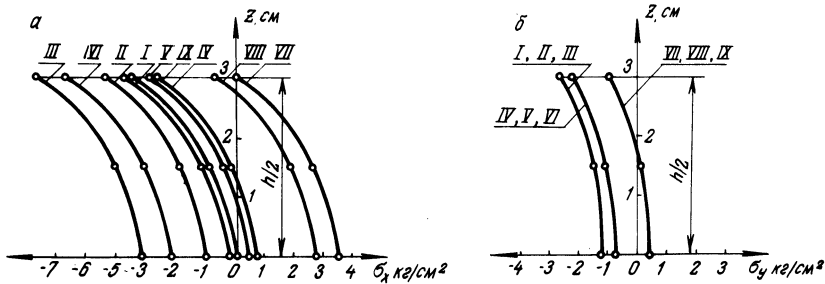


Рис. 1. Графики нормальных напряжений:

I — $x=0, y=0$; II — $x=0, y=\frac{b}{4}$; III — $x=0, y=\frac{b}{2}$; IV — $x=\frac{a}{4}, y=0$; V — $x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{4}$; VI — $x=\frac{a}{4}, y=\frac{b}{2}$ (a); VII — $x=\frac{a}{2}, y=0$; VIII — $x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{4}$; IX — $x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}$ (б).

Полагая в формулах (9) $\epsilon_0 = 0,1$ см; $\nu = 0,3$; $\gamma = 3,5$; $\gamma_2 = 1,5$; $H_1 = B_1 = B_2 = 1$ кг/см³; $a = b = 6$ см; $h = 4$ см; $G = 30,77$ кг/см² ($E = 80$ кг/см²); получая согласно (4) $A_1 = -1$ кг/см³; $H_2 = -2/3$ кг/см³; $A_2 = -1,5$ кг/см³,

можно построить графики напряжений (рис. 1), определяемые многочленом $i = \kappa = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б о й к о Н.Я. К вопросу о равновесии упругого параллелепипеда при частных видах нагрузки. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1975, вып. 2.
2. Б о й к о Н.Я. Сжатие упругого параллелепипеда при действии на него полного и усеченного жесткого клинообразного штампа. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1978, вып. 5.
3. К р у ш е в с к и й А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. — Мн., 1967.

УДК 621.81:539.4

Л.А.ШИБАЕВА

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ РАМЫ АВТОМОБИЛЯ

Ранее была получена система дифференциальных уравнений колебаний рамы автомобиля на основе вариационного принципа Лагранжа [1] в виде 12 уравнений в частных производных.

Полагая, что центры тяжести всех сечений рамы располагаются на прямой (ось OZ), можно выделить независимую группу трех уравнений, описывающих ее деформации в вертикальной плоскости YOZ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial z} \left(I_{22} \frac{\partial U_{11}}{\partial z} \right) - (\gamma I_{02} + I_{20}) U_{11} - \gamma_2 I_{02} \frac{\partial W_{01}}{\partial z} - \frac{\rho}{G} I_{22} \frac{\partial^2 U_{11}}{\partial t^2} + \\ + \frac{P_4}{G} = 0; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(I_{00} \frac{\partial V_{00}}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (I_{00} W_{01}) - \frac{\rho}{G} I_{00} \frac{\partial^2 V_{00}}{\partial t^2} + \frac{Q_1}{G} = 0; \\ \frac{\partial}{\partial z} (\gamma I_{02} \frac{\partial W_{01}}{\partial z} + \gamma_2 I_{02} U_{11}) - I_{00} \left(\frac{\partial V_{00}}{\partial z} + W_{01} \right) - \\ - \frac{\rho}{G} I_{02} \frac{\partial^2 W_{01}}{\partial t^2} + \frac{N_3}{G} = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}; \quad \gamma_2 = \frac{2\nu}{1-2\nu}; \quad I_{20} = \int_F x^2 dF;$$

$$I_{00} = \int_F dF; \quad I_{02} = \int_F y^2 dF; \quad I_{22} = \int_F x^2 y^2 dF.$$

Здесь ρ — плотность материала рамы; G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона.