При степени гармонических полиномов n = 1 система состоит из 9 линейных алгебраических уравнений. Результаты решения совпадают с результатами, получаемыми по формулам сопротивления материалов для центрально сжимаемых стержней. При n = 3 система состоит из 45 уравнений. Некоторые результаты расчета, время которого на ЭВМ "ЕС-1030" составило 1 мин, приведены в табл. 1. Из табл. 1 видно, что результаты решения тестовой задачи хорошо согласуются с физическим состоянием образца при данной схеме нагружения. Таким образом, при расчете объемного напряженно-деформированного состояния деталей методом Треффца можно использовать в качестве координатных функций полную систему полиномиальных решений уравнений теории упругости. Этот метод сочетает в себе лучшие стороны двух подходов, предложенных в работе [3], а именно: обеспечивается минимум потенциальной энергии тела на всех возможных перемещениях, дифференциальные уравнения равновесия внутри тела тождественно удовлетворяются, отсутствует произвол в выборе возможных состояний, матрица системы уравнений симметрична, главные элементы матрицы расположены на диагонали, что обеспечивает устойчивость решения при численной реализации метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. – Мн., 1967. 2. Кондратюк В.Ф., Крушевский А.Е. Некоторые вопросы расчета корпусных деталей машин на основе методов аналитической механики с применением ЭВМ. – В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1973. 3. Кондратюк В.Ф. Некоторые методы составления систем расчетных уравнений в задачах теории упругости. – В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1976, вып. 3. 4. Лурье А.И. Полиномиальное представление решений уравнений теории упругости. – В сб.: Проблемы механики твердого деформируемого тела. Л., 1970.

УДК 539.3

А.З.СЕВЕНЮК

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СПЕКТРА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ СЕЧЕНИЕМ ПРИ ТОЧНОМ ВЫПОЛНЕНИИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ НА ЕГО БОКОВЫХ ГРАНЯХ

Для расчета на прочность при динамической нагрузке необходимо знать собственные функции, которые зависят от собственных чисел (частот). Как следует из [2], точное определение спектра собственных частот колебаний упругих стержней встречает на своем пути большие математические трудности. На практике в технических расчетах для определения спектра собственных частот стержней постоянного сечения пользуются приближенной технической теорией, основанной на решении следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial^2 W_{00}}{\partial z^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 W_{00}}{\partial t^2} .$$

Техническая теория не учитывает при этом формы поперечного сечения, в ней не выполняются условия на боковых поверхностях стержня.

В [2] дается постановка задачи о нахождении спектра частот продольных колебаний упругого стержня прямоугольного сечения при точном выполнении краевых условий на его боковых гранях. Первое приближение задачи получалось при аппроксимации деформированного состояния поперечного сечения стержня с помощью полиномов 3-й степени.

Для получения более точного решения в данной статье дается второе приближение решения задачи при помощи полиномов 5-й степени, т.е. искомые упругие перемещения представляем в виде следующих конечных рядов:

$$u = xU_{10} + xy^2U_{12} + x^3U_{30} + xy^4U_{14} + x^3y^2U_{32} + x^5U_{50} ;$$

$$v = yV_{01} + x^2yV_{21} + y^3V_{03} + x^4yV_{41} + x^2y^3V_{23} + y^5V_{05} ;$$

$$w = W_{00} + x^2W_{20} + y^2W_{02} + x^4W_{40} + y^4W_{04} + x^2y^2W_{22} .$$

Для нахождения 18 неизвестных независимых обобщенных перемещений строим 15 дифференциальных уравнений из условия отсутствия нагрузки на боковых гранях стержня $x = \pm \frac{a}{2}$; $y = \pm \frac{b}{2}$ и три вариационных уравнения движения на основе вариационного уравнения равновесия элементарного слоя [3].

Указанную систему дифференциальных уравнений можно привести к следующей системе пяти обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$-\gamma_2 d_z^2 W_{00} + \left[\frac{(\gamma+2)\, a^2 d_z^2}{12} + 4(\gamma-1) \right] W_{20} - \frac{\gamma_2 b^2 d_z^2}{4} W_{02} +$$

$$+ \left[\frac{(3\gamma+2)\, a^2 d_z^2}{80} + 2(\gamma-1)\, a^2 W_{40} - \frac{\gamma_2 b^4 d_z^2}{16} W_{04} = 0 ;\right.$$

$$-\gamma_2 d_z^2 W_{00} + \left[\frac{(\gamma+2)\, b^2 d_z^2}{12} + 4(\gamma-1) \right] W_{02} - \frac{\gamma_2 a^2 d_z^2}{4} W_{20} +$$

$$+ \left[\frac{(3\gamma+2)\, b^2 d_z^2}{80} + 2(\gamma-1) \right] b^2 W_{04} - \frac{\gamma_2 a^4 d_z^2}{16} W_{40} = 0 ;$$

$$[(\frac{a^2 d_z^2}{3} - 40)W_{20} + (\frac{a^4 d_z^2}{14} - 16a^2)W_{40} =$$

$$= -\frac{\rho\omega^2}{G}[(\frac{a^2}{3} - \frac{2)}{d_z^2})W_{20} + (\frac{a^4}{14} - \frac{10a^2}{d_z^2})W_{40}] ;$$

$$[(\frac{b^2 d_z^2}{3} - 40)W_{02} + (\frac{b^4 d_z^2}{14} - 16b^2)W_{04}] = -\frac{\rho\omega^2}{G}[(\frac{b^2}{3} -$$

$$-\frac{20}{d_z^2})W_{02} + (\frac{b^4}{14} - \frac{10b^2}{d_z^2})W_{04}] ;$$

$$\gamma G d_z^2 W_{00} + 2G(\frac{\gamma a^2 d_z^2}{24} - \gamma_2)W_{20} + 2G(\frac{\gamma b^2 d_z^2}{24} - \gamma_2)W_{02} +$$

$$+ G(\frac{\gamma a^4 d_z^2}{80} - \gamma_2 a^2)W_{40} + G(\frac{\gamma b^4 d_z^2}{80} - \gamma_2 b^2)W_{04} =$$

$$= -\rho\omega^2(W_{00} + \frac{a^2}{12}W_{20} + \frac{b^2}{12}W_{02} + \frac{a^4}{80}W_{40} + \frac{b^4}{80}W_{40} .$$

Для решения полученной системы дифференциальных уравнений запишем следующую форму решения для W_{20} при условии $w = 0$ для $z = 0$:

$$W_{20} = B_1 \mathrm{sh}\alpha_1 z + B_2 \mathrm{sh}\alpha_2 z + B_3 \mathrm{sh}\alpha_3 z + B_4 \mathrm{sh}\alpha_4 z + B_5 \mathrm{sh}\alpha_5 z ,$$

где α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , α_5 находятся из характеристического уравнения соответствующего системе дифференциальных уравнений.

Частотное уравнение получается в результате выполнения условий на свободном конце стержня, т.е. при $z = h$:

$$\tau_{xz} = 0; \quad \tau_{yz} = 0 ; \quad \int \sigma_z dF = 0 .$$

В качестве числового примера рассмотрен стержень из стали со следующими техническими характеристиками и размерами:

$G = 7{,}848\ 10^{10}$ Н/м^2 ; $\rho = 7{,}85\ 10^3$ кг/м^3 ; $a = 1$ м, $b = 3$ м;

$\gamma = 3$; $h = 10$ м; 20 м ; 30 м.

Для нахождения искомых частот ω составлена программа в комплексной области чисел применительно к машинам "Минск-32" и ЕС. Полученные значения частот и их сравнение с частотами 1-го приближения и технической теории приводятся в табл. 1.

Исследование приведенной таблицы показывает, что данная теория совпадает с технической только лишь для низших частот. Что касается высших частот, то здесь наблюдается отличие данной теории от технической и она позволяет определить уточненное значение частоты продольных колебаний прямоугольных стержней.

Таблица 1.

h, м	ω	Номер частоты							
		1	2	3	4	5	6	7	8
h = 10	Техническая теория	785	2356	3926	5496	7067	8637	10208	11778
	1-е приближение	785	2343	3794	4284	6011	9077	10443	11851
	2-е приближение	785	2336	3180	3727	3784	4214	4684	5363
h = 20	Техническая теория	393	1178	1963	2748	3533	4319	5103	5889
	1-е приближение	393	1177	1956	2727	3480	4113	4317	4889
	2-е приближение	393	1176	1953	2714	3180	3440	3735	3930
h = 30	Техническая теория	262	785	1309	1832	2356	2879	3403	3926
	1-е приближение	262	785	1307	1827	2344	2855	3359	3845
	2-е приближение	262	785	1306	1824	2336	2838	3180	3323

ЛИТЕРАТУРА

1. И о н о в В.Н., О г и б а л о в П.М. Прочность пространственных элементов конструкций. – М., 1972. 2. К р у ш е в с к и й А.Е., С е в е н ю к А.З. Приближенное определение спектра частот продольных колебаний упругого параллелепипеда при точном выполнении краевых условий на его четырех гранях. – В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1978, вып. 5. 3. К р у ш е в с к и й А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. – Мн., 1967.

УДК 539.3

Н.Я.БОЙКО

СЖАТИЕ ЖЕСТКИМ ШЕРОХОВАТЫМ ПЛОСКИМ ШТАМПОМ УПРУГОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА, ЧЕТЫРЕ ГРАНИ КОТОРОГО НАХОДЯТСЯ В ЖЕСТКИХ ШЕРОХОВАТЫХ НАПРАВЛЯЮЩИХ

Имеем следующие краевые условия для рассматриваемого упругого параллелепипеда:

$$\text{при } z = \pm \frac{h}{2} \quad w = \mp \frac{\varepsilon_0}{2}; \quad \tau_{xz} = -H_1 x; \quad \tau_{yz} = -H_2 y; \tag{1}$$

$$\text{при } y = \pm \frac{b}{2} \quad v = 0; \quad \tau_{zy} = B_2 z; \quad \tau_{xy} = -B_1 x; \tag{2}$$

$$\text{при } x = \pm \frac{a}{2} \quad u = 0; \quad \tau_{zx} = A_2 z; \quad \tau_{yx} = -A_1 y. \tag{3}$$

Причем
$$A_2 = -H_1 \frac{a}{h}; \quad A_1 = -B_1 \frac{a}{b}; \quad B_2 = -H_2 \frac{b}{h} \tag{4}$$

на основании закона парности касательных напряжений.

Как следует из [1], сформулированную краевую задачу можно решать при помощи рядов:

$$u = U_{00} + \frac{1}{2}(12\frac{y^2}{b^2} - 1)U_{02} + \sum_{k=1}^{\infty} U_{0kc}\cos(\frac{2\pi k y}{b}) +$$
$$+ \frac{1}{2}(12\frac{z^2}{h^2} - 1)U_2 + \sum_{i=1}^{\infty} [U_{ic0} + \frac{1}{2}(12\frac{y^2}{b^2} - 1)U_{ic2} +$$