

ловиях возникает проскальзывание большее, чем то, которое здесь следует при заданном  $\xi$ . Это объясняется наличием в области контакта уравновешенной системы сил, способствующей расширению зон скольжения.

Результаты экспериментальной работы доложены на семинаре по качению эластичного колеса в МАДИ 24.10.79 г., а особенности конструкции – на 35 научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава БПИ. Описанная выше установка принципиально отличается от стенда для исследования частотных характеристик при боковом уводе, о котором было доложено автором 4.11.69 г. на заседании кафедры "Автомобили" БПИ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л е в и н М.А. Зависимость тангенциальной реакции от псевдоскольжения при качении упругого колеса. — ДАН БССР, 1971, т. 15, № 5.
2. К е л д ы ш М.В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси. — Труды ЦАГИ, 1945, № 564.
3. Л е в и н М.А. Некоторые результаты исследования реакций связей деформируемого колеса. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск, 1973.
4. Л е в и н М.А. О реакциях связей упругого колеса при качении. — ДАН БССР, 1972, т. 16, № 5.
5. Л е в и н М.А. Понижение порядка зависимостей для реакции связей катящегося деформируемого колеса. — ДАН БССР, 1974, т. 18, № 6.
6. Л е в и н М.А. Определение реакций связей катящегося деформируемого колеса. — Изв. АН СССР. Сер. "Механика твердого тела", 1977, № 6.
7. Л е в и н М.А., С о л о н с к и й А.С., М а т а т о в а А.П. Приложение теории качения деформируемого колеса к исследованию динамики разгона трактора. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1976, вып. 3.
8. Л е в и н М.А. Определение параметров стационарного и нестационарного увода колеса. — V и VI всесоюзные науч.-техн. семинары "Опыт работы по улучшению устойчивости и управляемости автомобиля в соответствии с нормами безопасности движения": Тез. докл. 18–20 ноября 1969, 27–29 октября 1970. М.: НАМИ, 1972.
9. Л е в и н М.А. Определение кинематических коэффициентов в теории качения. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1979, вып. 6.

УДК 539.3

Е.Н.Ламбина

#### ОБ ОДНОМ ОСОБОМ СЛУЧАЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Дифференциальное уравнение для радиального перемещения  $W$  в случае осесимметричных свободных колебаний сферической оболочки имеет вид [1, 2]

$$\Delta\Delta\Delta W_n + (4+K_n^2)\Delta\Delta W_n + C^2 \left(1 - \frac{K_n^2}{1-\mu^2}\right)\Delta W_n + C^2 \left(2 + \frac{1+3\mu}{1-\mu^2}K_n^2 - \frac{K_n^4}{1-\mu^2}\right)W_n = 0,$$

где  $\Delta$  — дифференциальный оператор

$$\frac{d^2}{d\theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{d}{d\theta},$$

$\theta$  — угол между радиусом и вертикалью;  $\mu$  — коэффициент Пуассона,

$$C^2 = 12(1-\mu^2) \frac{R^2}{\delta^2} \left(1 + \frac{\delta^2}{6R^2}\right),$$

где  $R$  и  $\delta$  — радиус и толщина оболочки соответственно;  $K_n$  — частотный коэффициент, связанный с частотой  $\omega$ , соответствующей  $n$ -й форме колебаний, соотношением

$$\omega_n = \frac{K_n}{R} \sqrt{\frac{E}{(1-\mu^2)\rho}},$$

где  $E$  — модуль Юнга;  $\rho$  — плотность материала оболочки.

Ограниченное при  $\theta = 0$  решение уравнения (1) представляется в виде

$$W_n = A_1 P_{n_1}(\cos \theta) + A_2 P_{n_2}(\cos \theta) + A_3 P_{n_3}(\cos \theta), \quad (2)$$

где  $P_{n_i}(\cos \theta)$  — сферические функции;  $A_i$  — произвольные постоянные, а величины  $P_i = n_i(n_i+1)$  удовлетворяют кубическому уравнению

$$p^3 - (K_n^2 + 4)p^2 + \left(1 - \frac{K_n^2}{1-\mu^2}\right)C^2 p - \left(2 + \frac{(1+3\mu)K_n^2 - K_n^4}{1-\mu^2}\right)C^2 = 0 \quad (3)$$

Формула (2) неприменима в случае кратных корней уравнения (3). Впервые правильное представление ограниченного при  $\theta = 0$  решения уравнения (1) в случае кратных корней уравнения (3) получено в работе [3], где задача сводится к вычислению двойного интеграла вида

$$I = \int_0^\theta \left[ \frac{1}{P_n^2(\cos \theta) \sin \theta} \int_0^\theta P_n^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right] d\theta.$$

В настоящей заметке предлагается другая форма решения уравнения (1) при  $p_1 = p_2$  (в виде разложения по полиномам Лежандра).

Пусть  $p_1 \neq p_2 \neq p_3$ . Общее ограниченное в полюсе решение уравнения (1) представим в виде

$$W = A_1 P_{n_1}(\cos \theta) + A_2 \frac{P_{n_2}(\cos \theta) - P_{n_1}(\cos \theta)}{n_2 - n_1} + A_3 P_{n_3}(\cos \theta).$$

При  $p_2 \rightarrow p_1$   $n_2 \rightarrow n_1$ .

Переходя к пределу, получим

$$W = A_1 P_{n_1}(\cos \theta) + A_2 \left. \frac{\partial P_{\gamma}(\cos \theta)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=n_1} + A_3 P_{n_3}(\cos \theta). \quad (4)$$

Для определения  $\frac{\partial P_{\gamma}(\cos \theta)}{\partial \gamma}$  воспользуемся формулой [4]

$$P_{\gamma}(\cos \theta) = \frac{\sin \gamma \pi}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{1}{\gamma - k} - \frac{1}{\gamma + k + 1} \right) P_k(\cos \theta) \quad (5)$$

( $\gamma$  не равно целому числу).

Дифференцируя (5) по  $\gamma$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{\gamma}(\cos \theta)}{\partial \gamma} &= \cos \gamma \pi \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{1}{\gamma - k} - \frac{1}{\gamma + k + 1} \right) P_k(\cos \theta) + \\ &+ \frac{\sin \gamma \pi}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[ \frac{1}{(\gamma + k + 1)^2} - \frac{1}{(\gamma - k)^2} \right] P_k(\cos \theta) \end{aligned} \quad (6)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{\gamma}(\cos \theta)}{\partial \gamma} &= \pi \operatorname{ctg} \gamma \pi \cdot P_{\gamma}(\cos \gamma) + \frac{\sin \gamma \pi}{\pi} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[ \frac{1}{(\gamma + k + 1)^2} - \frac{1}{(\gamma - k)^2} \right] P_k(\cos \theta). \end{aligned} \quad (7)$$

Первое слагаемое выражения (7) удовлетворяет при  $\gamma = n_1$  уравнению (1), следовательно, уравнению (1) будет удовлетворять и выражение

$$\psi_{n_1}(\cos \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[ \frac{1}{(n_1 + k + 1)^2} - \frac{1}{(n_1 - k)^2} \right] P_k(\cos \theta)$$

( $n_1$  не равно целому числу).

Случай целого  $n_1$  исследуем при помощи предельного перехода. Формулу (6) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_\gamma(\cos \theta)}{\partial \gamma} &= \cos \pi \gamma \cdot \sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^\kappa \left[ \frac{1}{(\gamma - \kappa)} - \frac{1}{(\gamma + \kappa + 1)} \right] P_\kappa(\cos \theta) + \\ &+ \frac{\sin \gamma \pi}{\pi} \cdot \sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^\kappa \left[ \frac{1}{(\gamma + \kappa + 1)^2} - \frac{1}{(\gamma - \kappa)^2} \right] P_\kappa(\cos \theta) + \\ &+ (-1)^1 \left[ \frac{\cos \pi \gamma}{\gamma - 1} - \frac{\sin \pi \gamma}{\pi (\gamma - 1)^2} \right] P_1(\cos \theta), \end{aligned}$$

отдельно выделив слагаемые, обращающиеся при  $\gamma = 1$  в бесконечность (знак "штрих" в суммах обозначает, что в коэффициентах при  $P_\kappa(\cos \theta)$  для  $R = 1$  опускаются слагаемые, обращающиеся при  $\gamma = 1$  в бесконечность).

Переходя к пределу при  $\gamma \rightarrow 1$ , учитывая, что при целом  $l$

$$\cos \pi l = (-1)^l; \quad \sin \pi l = 0$$

и

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \left[ \frac{\cos \pi \gamma}{\gamma - 1} - \frac{\sin \pi \gamma}{\pi (\gamma - 1)^2} \right] = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{\pi (\gamma - 1) \cos \pi \gamma - \sin \pi \gamma}{\pi (\gamma - 1)^2} = 0,$$

получим

$$\frac{\partial P_\gamma(\cos \theta)}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=1} = (-1)^1 \sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^\kappa \left[ \frac{1}{(1 - \kappa)} - \frac{1}{(1 + \kappa + 1)} \right] P_\kappa(\cos \theta).$$

Окончательно для (1) при  $p_1 = p_2$  будем иметь

$$W = A_1 P_{n_1}(\cos \theta) + A_2 \psi_{n_1}(\cos \theta) + A_3 P_{n_3}(\cos \theta),$$

где при нецелом  $n_1$

$$\psi_{n_1} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^\kappa \left[ \frac{1}{(n_1 + \kappa + 1)^2} - \frac{1}{(n_1 - \kappa)^2} \right] P_\kappa(\cos \theta);$$

при целом  $n_1$

$$\psi_{n_1} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^\kappa \left[ \frac{1}{(n_1 - \kappa)} - \frac{1}{(n_1 + \kappa + 1)} \right] P_\kappa(\cos \theta).$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л у ж и н О.В. Осесимметричные колебания сферических куполов при различных граничных условиях. — В кн.: Исследования по теории сооружений. М., 1962, вып. XI. 2. Л и з а р е в А.Д. О низших частотах собственных осесимметричных колебаний непологих сферических оболочек. — МТТ, 1967, № 3. 3. Л и з а р е в А.Д., Р о с т а н и н а Н.Б. Некоторые обратные задачи теории колебаний сферических оболочек. Прикладная механика. 1967, т. XII, № 5. 4. Г р а д ш т е й н И.С., Р ы ж и к И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М., 1962.

УДК 532.135

Е.Н.Ламбина

### О ХАРАКТЕРЕ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКО-УПРУГИХ ЛИНЕЙНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Решение ряда задач течения вязкой несжимаемой жидкости имеет вид

$$U = U_0 + \sum_{m=1}^{\infty} U_m \cdot e^{-\mu \lambda_m t}, \quad (1)$$

где  $U_0$  и  $U_m$  зависят только от координат и не зависят от коэффициента вязкости  $\mu$ ;  $\lambda_m$  — положительные коэффициенты, не зависящие от  $\mu$ , причем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = \infty; \quad U|_{t=0} = 0.$$

К таким задачам относятся задачи течения вязкой жидкости между параллельными плоскостями, между коаксильными цилиндрами и т.п. [1]. Назовем течения подобного типа экспоненциальными. Определим соответствующие им течения вязко-упругой жидкости с функцией релаксации

$$\mu(t) = \sum_{i=1}^n G_i e^{-s_i t}; \quad s_i = \frac{G_i}{\eta_i} \quad [2].$$

Используя принцип соответствия для вязко-упругих жидкостей [3], получим

$$\bar{U} = \frac{U_0}{s} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{U_m}{s + \mu \lambda_m};$$