

$$P_1 = -\xi_1^0 (r_K - r); \quad M_2 = \xi_2^0 (r_K - r) - M_T; \quad (\dot{\varphi} > 0).$$

Заметим, что здесь P_1 и M_2 составляющие реакции опорной плоскости, приведенные к оси колеса. В теории автомобиля рассматривается также крутящий момент, приложенный к оси колеса

$$M_2' = -M_2 = -\xi_2^0 (r_K - r) + M_T.$$

Коэффициенты ξ_1^0 , ξ_2^0 и M_T обычно определяются экспериментально. В нашем случае

$$\xi_1^0 = 2c_1 \alpha^2 R [1 + (c_3 - c_1) \alpha^2 / 3c_1];$$

$$\xi_2^0 = R(1 - \alpha^2/2) \xi_1^0 + \frac{2}{3} c_1 R^2 \alpha^4.$$

Зависимости для P_1 , M_2 и M_2' хорошо согласуются с опытом (см., например, [4], фиг. 11 на с. 34), который подтверждает их линейный характер в функции от Δ_1 .

Приведем также зависимости $P_1(M_2')$ и $M_2'(P_1)$, которые здесь оказываются следующими:

$$P_1 = (M_2' - M_T) \xi_1^0 / \xi_2^0; \quad M_2' = P_1 \xi_2^0 / \xi_1^0 + M_T.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин М.А. Определение реакции связей катящегося деформируемого колеса. — Изв. АН СССР. Сер. „Механика твердого тела“, 1977, № 6.
2. Левин М.А. Новая теория бокового увода колеса, приводящая к интегрально-разностным или дифференциально-разностным уравнениям. — В сб.: 25 науч.-техн. конф. БПИ. Материалы секции теоретической и прикладной механики. Мн., 1969.
3. Левин М.А. Теория движения деформируемого колеса при отсутствии увода, приводящая к разностным уравнениям. — В сб.: 26 науч.-техн. конф. БПИ: Материалы секции теоретической и прикладной механики. Мн., 1970.
4. Чудakov Е.А. Качение автомобильного колеса. — М., 1947.

УДК 531.3+629.11.012.5

М.А.Левин

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОДОЛЬНОЙ РЕАКЦИИ КАТЯЩЕГОСЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО КОЛЕСА

Исследование сил, действующих на катящееся деформируемое колесо со стороны опорной поверхности, составляет предмет теории качения. Уравнения теории качения в динамике транспорт-

ных систем с качением имеют такое же значение, как, например, уравнения Навье-Стокса в гидродинамике или уравнения Коши в теории упругости. Правильность уравнений, описывающих связь между силами в области контакта и законом движения жесткого диска колеса, можно оценить по экспериментальным частотным характеристикам. Поэтому накопление подобных экспериментальных данных представляет интерес.

В работе излагаются результаты исследования экспериментальных частотных характеристик продольной силы деформируемого колеса. Описана экспериментальная установка, методика, а также дан анализ результатов с учетом проскальзывания в области контакта.

Эксперимент был проведен на установке, принципиальная схема которой показана на рис. 1. Деформируемое колесо представляет собой шину 1, одетую на диск, жестко соединенный с двумя шестернями 2. Диаметр шестерни подбирается таким образом, чтобы при заданной нагрузке и давлении радиус качения в свободном режиме совпадал с радиусом начальной окружности шестерни. Деформируемое колесо (шина) опирается на плоский стол 3 достаточной длины, который может перемещаться в продольном направлении, опираясь на роликовые опоры 4. Последние могут перекачиваться по горизонтальной плоскости, связанной с основанием, на котором жестко закреплены две рейки 5. Шестерни 2 находятся в зацеплении с рейками 5. Таким образом, при неподвижном столе обеспечивается радиус качения в свободном режиме. Качение шины с блоком шестерен осуществляется посредством движения проволоки 6, связанной через подшипник 7 с блоком шестерен, и наматываемой на барабан 8, жестко связанный с диском 9 фрикционного вариатора. Проволока 6 натягивается с помощью груза 17. Через ролик 10 вариатора вращение передается диску 11, связан-

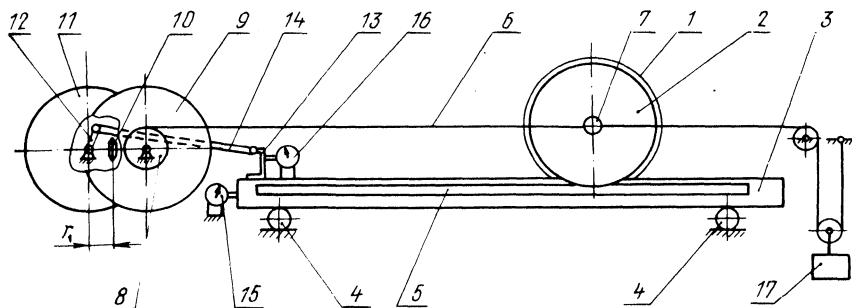


Рис. 1. Принципиальная схема экспериментальной установки.

ному с кривошипом 12, который сообщает возвратно-поступательное движение плоскому столу 3 через упругий элемент 13. Величину радиуса кривошипа можно регулировать. Поскольку отношение длины шатуна 14 к радиусу кривошипа больше 200, то кинематика обеспечивает точность гармонического перемещения стола, равную $\pm 0,005\%$, что в данном случае находится в соответствии с допусками при изготовлении механизма по второму классу точности.

Перемещение стола измеряется посредством индикатора 15 с ценой деления 0,01 мм, а усилие на столе, соответствующее продольной силе с учетом погрешности "нуля", — с помощью индикатора 16 с ценой деления 0,001 мм. При этом тарировочный коэффициент оказался равным 10/17 Н/мкм. Наклейка тензорезисторов по мостовой схеме на упругий элемент 13 и тензоэлемент продольного перемещения позволяет посредством системы усилитель-осциллограф записать продольные перемещения и силу на фотоленту. Для этой же цели может быть использован также двухканальный самописец.

Значение кинематической частоты ν устанавливается посредством фиксации величины r_1 , определяющей положение ролика 10

$$r_1 = 125 / (1 + 30,3 \pi k/a); \quad k = \nu / 2 \pi .$$

При каждом значении ν записываются не менее пяти циклов колебаний (т.е. не менее 10 размахов). Средняя величина отношения амплитуды продольной силы к амплитуде продольного перемещения, равного амплитуде u_{10} тангенциального псевдоскольжения $u_1 = x_c - r \varphi = u_{10} \sin(\nu r \varphi / 2a)$, дает соответствующее значение ординаты амплитудно-частотной характеристики при заданной абсциссе ν . Здесь r — радиус качения колеса в свободном режиме; $2a$ — длина области контакта. Значение u_{10} устанавливается с помощью изменения радиуса кривошипа 12. Фазовый сдвиг может быть определен по сдвигу фаз двух записанных периодических процессов. В данном случае размахи силы определялись по максимальным отклонениям стрелки индикатора 16 в процессе медленного вращения барабана 8.

Описанная экспериментальная установка обладает рядом достоинств. Обычно реализация заданного режима качения на стенде при определенной продольной силе требует синхронизации движения приводов колеса и опорной поверхности, что приводит к большим трудностям при испытаниях на различных скоростях. Здесь же благодаря использованию системы рейка-шестерня эта проблема устраняется в широком диапазоне скоростей. Поскольку осцил-

ляционное движение должно быть синхронизировано, то в обычном исполнении это потребовало бы применения трех приводов с использованием сложной системы синхронизации. В установке на рис. 1 благодаря замыканию кинематической цепи колесо-опорная поверхность-осциллятор синхронизация обеспечивается автоматически и нужен только один привод вместо трех. Достоинством установки является также использование плоской опорной поверхности и малая мощность привода в связи с замыканием наиболее мощных силовых факторов в области между опорной плоскостью и рейками. Благодаря малой мощности привода и использованной методике с целью уменьшения погрешности эксперимента можно применять ручной привод и проводить испытания на очень малых скоростях, причем неравномерность вращения привода не оказывает никакого влияния из-за указанной выше автоматической синхронизации. Эти же особенности позволяют еще более снизить погрешность эксперимента за счет непосредственного считывания показаний с индикаторов, устранив тем самым влияние нередко значительных погрешностей записывающей аппаратуры в системе тензорезистор-усилитель-осциллограф-фотолента.

Испытывалась шина 205x56 (модель Л-155, ГОСТ 4750-74). Нагрузка составила 130 Н; давление — $0,6 \cdot 10^5$ Па; $2a = 0,09$ м; $2U_{10} = 0,125$ см. Экспериментальные точки амплитудно-частотной характеристики продольной силы показаны на рис. 2. Статистическая обработка показывает, что с надежностью в 90% для точки с абсциссой $\kappa = 0,2$ значение ординаты должно иметь отклонения в пределах не более $\pm 5,5\%$. Аналогичный результат получается и для других ординат.

Воспользуемся известной аналогией [1] между зависимостями для продольной и боковой силы. При малых ν можно определить коэффициент тангенциального (продольного) псевдоскольжения $K_{\tau} = 522 \times 9 / (17 \times 0,125 \times 0,1 \times 2 \pi) = 3520$ Н, где $522/17$ — размах продольной силы при $\kappa = 0,1$. Непосредственно из опытных данных находим $C_{\tau}^{\text{эф}} = 54\ 300$ Н/м в предположении, что обработка эксперимента проводится на основе теории, являющейся обобщением теории Келдыша [2] на случай качения колеса в своей срединной плоскости. Отметим, что на рис. 2 заметно западание ординат после $\nu = 2 \pi$, что говорит о возможности обработки полученных данных и на основе теории, соответствующей основному варианту в [3–6]. Значение продольной жесткости в статике равно $C_{\tau} = 72\ 500$ Н/м. Значительная величина $(C_{\tau}^{\text{эф}} / C_{\tau}) = 0,34$ частично связана с несовпадением коэффици-

ентов трения скольжения и покоя и указывает на наличие существенного проскальзывания в области контакта.

Для анализа полученного экспериментального результата используем зависимости (1*), (3*), (14), (16) в работе [7], которые учитывают проскальзывание в области контакта при действии сил, лежащих только в срединной плоскости катящегося деформируемого колеса

$$P_1 = -f_1' \sigma_1;$$

$$\dot{u}_1 - \dot{\sigma}_1 = \nu_1 r \dot{\varphi}; \quad \dot{\nu}_1 = (s_1 \sigma_1 - s_2 \nu_1) r \dot{\varphi};$$

$$P_1(\nu_1) = -P_{1 \max} (1 - e^{-n}) \operatorname{sign}(\nu_1); \quad (1)$$

$$n = K_{\tau} |\nu_1| / P_{1 \max};$$

$$f_1' = |P_1(|\nu_1|)| / |\nu_1| s_1 / s_2.$$

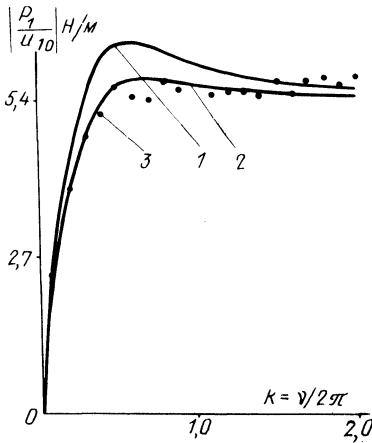


Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика продольной силы для шины 205x56 (модель Л-155); 1 — в случае пренебрежимо малого проскальзывания, $\xi = 0,01$; 2 — с учетом проскальзывания по методу гармонической линеаризации при $\xi = 0,36$; 3 — экспериментальные точки.

Очевидно, что если $|\nu_1| \ll 1$, то получаются уравнения, обобщающие теорию Келдыша на случай качения колеса в своей срединной плоскости при пренебрежимо малом проскальзывании в области контакта [3–6].

Положим, что функция, соответствующая тангенциальному псевдоскольжению, изменяется по гармоническому закону $u_1 = u_{10} \sin(\beta \varphi)$, где $\beta = \nu r / 2a$. Тогда для продольной силы $P_1(t)$ получим выражение, которое при переходе к безразмерной силе принимает следующий вид:

$$P_1^*(t) = P_1(t)/f_1 u_{10} = [(1 - e^{-\infty})/\infty] a_1 \sin(\beta \varphi + \Phi_1 - \pi); \quad (2)$$

где $\infty = \xi, a_2 \left| \sin(\beta \varphi + \Phi_2) \right| s_2/s_1$; $\xi = f_1 u_{10}/P_{1\max}$ — безразмерная амплитуда; $P_{1\max} = P_3 \mu$ — максимально возможная продольная сила; μ — коэффициент трения скольжения; f_1 — продольная жесткость при малых силах; a_1 и Φ_1 — амплитуда и фаза продольной деформации σ_1 ; a_2 и Φ_2 — амплитуда и фаза растяжения ν_1 деформируемой периферии в центре области контакта. Указанные амплитуды и фазы находятся при единичном по модулю гармоническом воздействии u_1 из изображений по Лапласу

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1 &= \bar{u}_1 p(p + s_2 r) / (p^2 + ps_2 r + s_1 r^2); \\ \bar{\nu}_1 &= \bar{u}_1 p r s_1 / (p^2 + ps_2 r + s_1 r^2). \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, выражение для $P_1^*(t)$ зависит от ξ , а последнее определяется величиной амплитуды воздействия. Очевидно, что при $\xi \ll 1$, а значит, и $\infty \ll 1$ получим изменение $P_1^*(t)$ по гармоническому закону, что соответствует линейной системе при пренебрежимо малом проскальзывании. Если последнее условие не выполняется, то функция $P_1^*(t)$ оказывается периодической, но не гармонической, что соответствует нелинейной системе с соответствующим скольжением.

Воспользуемся методом гармонической линеаризации для анализа зависимости $P_1^*(t)$. Посредством разработанной автором программы на ФОРТРАНе находится амплитуда и фаза первой гармоники в функции ξ .

В связи с аналогией между боковым и продольным движением с точки зрения их описания [1] проиллюстрируем результаты работы программы на примере качения при боковом гармоническом воздействии. Соответствующее выражение для $P_2^*(t)$ получается простой заменой $\sigma_1, \nu_1, s_1, s_2, P_{1\max}, \dots$ на $\sigma_2, \nu_2, s_4, s_5, P_{2\max}, \dots$ Воспользуемся экспериментальными результатами, приведенными в [2] на графике 4с с.5 для шины 400x150 при давлении $1,5 \cdot 10^5$ Па и нагрузке 3000Н, для которой $s_4 = 94 \text{ м}^{-2}$, $s_5 = 24 \text{ м}^{-1}$ и $2a \approx 0,13$ м. На рис. 3 представлены амплитудно-частотные характеристики безразмерной боковой силы при различных ξ . Из рис. 3 следует, что уже при $\xi = 0,313$ существенно изменяется вид этих характеристик и исчезает явно выраженный максимум с последующим снижением, что характерно для линейной системы при малых ξ . Очевидно, что наименее подверженной проскальзыванию является область малых ν , где

все кривые совпадают, что естественно, так как в этой области из-за малых амплитуд проскальзывание в области контакта оказывается малым.

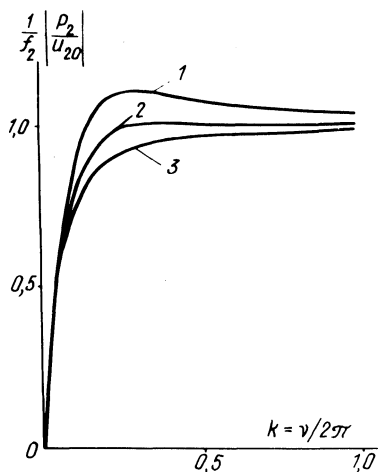


Рис. 3. Безразмерная амплитудно-частотная характеристика боковой силы по данным [2]:
 1 – в случае пренебрежимо малого проскальзывания; $\xi = 0,01$; 2 – с учетом проскальзывания по методу гармонической линеаризации, $\xi = 0,313$; 3 – $\xi = 0,5$.

Из сказанного выше следует, что обработка экспериментальных частотных характеристик, полученных при наличии заметного проскальзывания, на основе линейной теории, не учитывающей его, может привести к неверным результатам, особенно при неправильном выборе области изменения кинематической частоты. Покажем это на примере обработки кривой 2 при $\xi = 0,313$, т.е. при существенном проскальзывании, по минимуму квадратического отклонения от зависимости по линейной теории [2]. При этом будем изменять число точек N , подлежащих учету, расширяя диапазон изменения ν и число варьируемых параметров. В последнем случае вариант I соответствует варьированию s_4 при обязательном выполнении в теории [2] соотношения $K/C = s_5/s_4$ и заданном C , вариант II соответствует варьированию s_4 и s_5 при заданном C , вариант III – варьированию всех трех величин s_4 , s_5 и C . Программа расчета по варианту I представлена в докладе [8], а по варианту III – в сообщении автора на заседании кафедры "Тракторы" БПИ 10.01.1978 г.

Результаты определения, например, коэффициента s_4 приведены в табл. 1. Из таблицы следует, что обработка частотной характеристики, полученной при наличии существенного проскальзыва-

Т а б л и ц а 1

$\kappa = \nu/2\pi$	N	I	II	III
0,4	4	118	200	100
0,5	5	205	288	100
0,6	6	268	334	106
0,7	7	314	368	128
0,8	8	358	405	142
0,9	9	400	440	154
1,0	10	448	488	156
1,1	11	492	531	161
1,2	12	534	572	—
1,3	13	574	603	—

ния, на основе линейной теории может привести к каким угодно результатам. Причем значения s_4 возрастают с увеличением области учитываемых значений ν , а наибольшие величины дает вариант II. Как видно, наиболее приемлемой с точки зрения нахождения кинематических коэффициентов линейной теории является область малых ν , так как здесь из-за малого проскальзывания наблюдается лучшее соответствие линейной теории, для которой должно было бы получиться $s_4 = 94 \text{ м}^{-2}$. Однако нужно учесть, что при малых ν опытные данные могут давать значительный разброс также из-за сильного влияния погрешности "нуля". Интересно, что даже небольшая ошибка в определении C (всего лишь порядка 5%) приводит при счете по вариантам I и II к результатам, отличающимся в несколько раз, если, конечно, используется область немалых ν . Действительно, по варианту III при $N = 11$ в результате счета получаем, что $s_4 = 161 \text{ м}^{-2}$, $s_5 = 41 \text{ м}^{-1}$, а вычисленная боковая жесткость меньше на 5,3% в сравнении с той, которая введена в качестве постоянной в вариантах I и II. Следовательно, если при вычислении по варианту II ввести жесткость на 5,3% меньшую использованной, то вместо значения $s_4 = 531 \text{ м}^{-2}$ получилось бы $s_4 = 161 \text{ м}^{-2}$.

Отметим, что с удовлетворительной точностью можно определять значения кинематических коэффициентов в теории [2], не прибегая к экспериментальному построению частотных характе-

ристик. При этом часто получаются результаты лучшие, чем те, которые следуют из табл. 1 с использованием области немалых ν . Для этого необходимо знать отношение K/C и величину $2a$. Действительно, в соответствии с [8] $K/C = s_5/s_4 = 2a(h_0 + 0,5)$; $h_0 = (K/C - a)/2a$;

$$\gamma = 3/[1 - h_0^3 / (0,5 + h_0)^3]; \quad (4)$$

$$s_5 = \gamma C/K; \quad s_4 = \gamma C^2/K^2.$$

В нашем случае $K/C = 0,25$ м; $2a = 0,13$ м, что дает по формулам (4) $s_4 = 81 \text{ м}^{-2}$, $s_5 = 20 \text{ м}^{-1}$. Эти значения близки к экспериментальным значениям $s_4 = 94 \text{ м}^{-2}$ и $s_5 = 24 \text{ м}^{-1}$ в [2].

При пренебрежимо малом проскальзывании может быть полезен также прием, основанный на нахождении абсциссы ν_* экспериментальной частотной характеристики, соответствующей ординате $C^{\text{ЭФ}}$ в области возрастания ординат (в этом случае требуется тщательный анализ при определении $C^{\text{ЭФ}}$). Тогда $s_4 = \nu_*^2/2a^2$.

Отметим, что значения s_4 и s_5 в линейной теории, полученные при обработке эксперимента с проскальзыванием, в особенности в диапазоне немалых ν , не позволяют хорошо даже осредненно учесть проскальзывание в линейной теории, так как при этом сильно искажается наиболее важный начальный участок характеристики (его кривизна более всего), соответствующий малым ν .

Таким образом, для обработки результатов эксперимента, проведенного при существенном проскальзывании, необходимо использовать и соответствующую теорию, которая учитывала бы это обстоятельство (1) — (3):

Для шины, испытанной на установке (см. рис. 1), получены значения $K_{\tau} = 3520$ Н, $C_{\tau}^{\text{ЭФ}} = 54300$ Н/м, $2a = 0,09$ м. Основываясь на аналогии между зависимостями для боковой и продольной сил, можно найти значения $s_1 = 735 \text{ м}^{-2}$ и $s_2 = 48^{-1}$ по формулам, аналогичным (4) и приведенным в [8]. Более точные методы определения этих коэффициентов даны в [5,6], а затем [9]. Исходя из того, что $P_{l \text{ max}}$ имеет порядок 100 Н, а максимальная амплитуда силы в области определения эффективной жесткости равна 36 Н, находим $\xi_2 = 0,36$. С использованием этих данных по методу гармонической линеаризации получаем амплитудно-частотную характеристику в виде кривой 2 на рис. 2, которая хорошо согласуется с опытными данными. Кривая 1 на рис. 2 соответствует характеристике, полученной без учета проскальзывания в области контакта, т.е. при очень малых ξ_2 . Отметим, что в реальных ус-

ловиях возникает проскальзывание большее, чем то, которое здесь следует при заданном ξ . Это объясняется наличием в области контакта уравновешенной системы сил, способствующей расширению зон скольжения.

Результаты экспериментальной работы доложены на семинаре по качению эластичного колеса в МАДИ 24.10.79 г., а особенности конструкции – на 35 научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава БПИ. Описанная выше установка принципиально отличается от стенда для исследования частотных характеристик при боковом уводе, о котором было доложено автором 4.11.69 г. на заседании кафедры "Автомобили" БПИ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л е в и н М.А. Зависимость тангенциальной реакции от псевдоскольжения при качении упругого колеса. — ДАН БССР, 1971, т. 15, № 5.
2. К е л д ы ш М.В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси. — Труды ЦАГИ, 1945, № 564.
3. Л е в и н М.А. Некоторые результаты исследования реакций связей деформируемого колеса. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск, 1973.
4. Л е в и н М.А. О реакциях связей упругого колеса при качении. — ДАН БССР, 1972, т. 16, № 5.
5. Л е в и н М.А. Понижение порядка зависимостей для реакции связей катящегося деформируемого колеса. — ДАН БССР, 1974, т. 18, № 6.
6. Л е в и н М.А. Определение реакций связей катящегося деформируемого колеса. — Изв. АН СССР. Сер. "Механика твердого тела", 1977, № 6.
7. Л е в и н М.А., С о л о н с к и й А.С., М а т а т о в а А.П. Приложение теории качения деформируемого колеса к исследованию динамики разгона трактора. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1976, вып. 3.
8. Л е в и н М.А. Определение параметров стационарного и нестационарного увода колеса. — V и VI всесоюзные науч.-техн. семинары "Опыт работы по улучшению устойчивости и управляемости автомобиля в соответствии с нормами безопасности движения": Тез. докл. 18–20 ноября 1969, 27–29 октября 1970. М.: НАМИ, 1972.
9. Л е в и н М.А. Определение кинематических коэффициентов в теории качения. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1979, вып. 6.

УДК 539.3

Е.Н.Ламбина

ОБ ОДНОМ ОСОБОМ СЛУЧАЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Дифференциальное уравнение для радиального перемещения W в случае осесимметричных свободных колебаний сферической оболочки имеет вид [1, 2]