

Согласно (37) и (38) малость вклада релаксирующих частей вязкостей объясняет практическое отсутствие частотной зависимости коэффициентов вязкости. Можно ожидать обнаружения частотной дисперсии вязкостей на существенно более высоких частотах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов И.Г., Соловьев В.А., Сырников Ю.П. Основы молекулярной акустики. — М., 1964.
2. Немцов В.Б. Статистическая теория гидродинамических и кинетических процессов в жидких кристаллах. — ТМФ, 25, 1975, № 1.
3. Nemtsov V.B. Statistical hydrodynamics of cholesteric liquid Crystals. — Physica, 86A, 1977.
4. Немцов В.Б. Частотная дисперсия кинетических коэффициентов нематических жидких кристаллов. — В сб.: Физика жидкого состояния. Киев, 1977, № 5.
5. Martiny P., Candau S. Determination of viscosity coefficients of a nematic liquid crystal using a shear waves reflectance technique. — Mol. Cryst. and Liquid Cryst., 14, 1971.
6. Barrat P.G., Leslie F.M. Reflection and refraction on an obliquely incident shear wave at solid-nematic interface. — Journ. de Phys. Coll., 3, 40, 1979.
7. Lee Y.S., Golub S.L., Brown G.H. An ultrasonic shear wave study of the mechanical properties of nematic liquid crystal. — I. Phys. Chem., 76, 1972, N 17.
8. Kiry F., Martiny P. Ultrasonic investigation of anisotropic viscosities in a nematic liquid crystal. — Journ. de Phys., 38, 1977, N 2.
9. П. де Жен. Физика жидких кристаллов. — М., 1977.
10. Аэро Э.Л., Булыгин А.Н. Гидромеханика жидких кристаллов. — В сб.: Гидромеханика. М., 1973, т. 7.
11. Федоров Ф.И. Теория гиротропии. — Мн., 1976.
12. Parodi O. Stress tensor for a nematic liquid crystal. — Journ. de Phys., 31, 1970, 581.
13. Немцов В.Б. О статистической теории вязко-упругих свойств асимметричных сред. — ПММ. 35, 1971, № 3.
14. Немцов В.Б., Ротт Л.А. К статистической теории упругих свойств конденсированных систем. — В сб.: Применение ультразвуки к исследованию вещества. М., 1968, вып. 23.
15. Брук-Левинсон Э.Т., Вихренко В.С., Немцов В.Б. Статистическая оценка дополнительных высокочастотных модулей упругости асимметричной среды. — Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1971, № 4.

УДК 531.3+629.11.012.5

М.А.Левин

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ РЕАКЦИИ ОПОРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРОСТЕЙШЕГО КАТЯЩЕГОСЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО КОЛЕСА

В работе рассматривается простейшая модель деформируемого колеса, являющаяся частным случаем рассмотренной в [1]

при $b = N_1 = N_2 = 0$. При этом диск колеса движется так, что заданы $x_c(\varphi)$, $y_c(\varphi)$, $z_c = z_{c0} = \text{const}$; $\theta(\varphi)$; $\psi = 0$. Предполагается также, что $\alpha = \alpha_1 = \alpha_0 = \text{const}$. Особенностью данной работы в сравнении с [1] является удержание коэффициентов порядка α^3 перед малыми отклонениями в сравнении с α^2 в [1]. Это обстоятельство позволяет повысить точность рассмотрения механизма качения в случае простейшей модели, которая представляет также и самостоятельный интерес. С другой стороны, данную работу можно рассматривать как обобщение результатов, содержащихся в [2,3]. Ниже даны также соотношения, описывающие стационарное качение, вытекающие как частный случай из уравнений нестационарного. Изложение ведется со ссылками на работу [1] и в обозначениях этой работы.

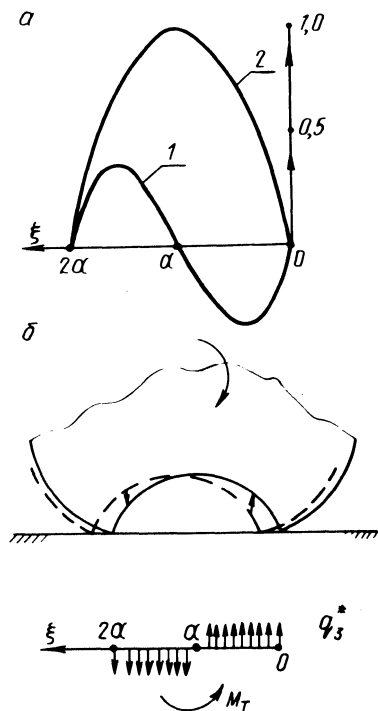


Рис. 1. Силы, действующие в области контакта колеса в свободном режиме качения:

а — в предположении об отсутствии сил трения; б — схема сил трения;
 1 — зависимость $2q_1/R(c_3 - 2c_1/3)$;
 2 — зависимость $2q_3/Rc_3$.

Предполагается, что проскальзывание отсутствует, точнее — зоны проскальзывания пренебрежимо малы в сравнении с длиной области контакта. Принимается также, что энергия, накопленная деформируемой периферией в области контакта, рассеивается за промежуток времени, соответствующий повороту диска на угол порядка π . В момент времени при угле поворота диска, равном

γ' (см. рис. 1 в [1]), точка деформируемой периферии (конец стержня), впервые вступающая в контакт с плоскостью качения xu , Γ_φ в данном случае не имеет начальных деформаций и совпадает с соответствующей ей на диске точкой А, которая в такой постановке совпадает с пересечением окружности радиуса R в плоскости диска и следом ее на плоскости xu , т.е. $\vec{\lambda}(\varphi, 0) = 0$.

В данном случае, когда рассматривается простейшая стержневая модель, на единицу первоначальной длины элемента деформируемой периферии $Rd\xi$, (здесь $\xi = \mu$, так как $\alpha = \text{const}$) в системе ортов $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ [1] действуют распределенные усилия $q'_1 = c_1 \lambda'_1$; $q'_2 = c_2 \lambda'_2$; $q'_3 = c_3 \lambda'_3$. Подставив эти значения в выражения (2.4), (2.5) [1], найдем с удержанием в коэффициентах при λ_1 и λ_3 членов порядка не выше α^3 следующие соотношения:

$$\begin{aligned} q_1 &= [c_1 + (c_3 - c_1)(\alpha - \xi)^2] \lambda_1 + (c_1 - c_3)(\alpha - \xi) [1 - \frac{2}{3}(\alpha - \xi)^2] \lambda_3; \\ q_2 &= c_2 \lambda_2; \\ q_3 &= (c_1 - c_3)(\alpha - \xi) [1 - \frac{2}{3}(\alpha - \xi)^2] \lambda_1 + [c_3 + (c_1 - c_3)(\alpha - \xi)^2] \lambda_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Рассмотрим движение, мало отклоняющееся от невозмущенного. Наряду с малым отклонением θ введем

$$u_1(\varphi) = x_c(\varphi) - r\varphi; \quad u_2(\varphi) = y_c(\varphi). \quad (2)$$

Под невозмущенным движением понимается

$$x_{c0} = r\varphi; \quad y_{c0} = \theta_0 = 0; \quad z_{c0} = z_c = R \cos \alpha,$$

где r – радиус качения в свободном режиме, когда $P_1 = 0$ в этом невозмущенном движении.

Удерживая малые отклонения в степени не выше первой, из выражений (3.4) и (3.6) в [1] при $\vec{\lambda}(\varphi, 0) = 0$ находим зависимости $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Например, для λ_1 получаем

$$\lambda_1 = u_1(\varphi - \xi) - u_1(\varphi) - R \sin(\alpha - \xi) - r\xi + R \sin \alpha.$$

Подстановка $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ в выражение (4.1) [1] позволяет найти все составляющие реакции опорной плоскости. Из условия $P_1 = 0$ в невозмущенном движении, когда $u_1 = 0$, находим, что λ_1 должно удовлетворять условию $\lambda_1(\xi) = -\lambda_1(2\alpha - \xi)$. Последнее дает

$$r = R \sin \alpha / \alpha \approx R (1 - \alpha^2/6), \quad (3)$$

что позволяет привести выражения для $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ к виду

$$\begin{aligned} \lambda_1(\varphi, \xi) &= U_1(\varphi - \xi) - u_1(\varphi) + (\alpha - \xi)r - R \sin(\alpha - \xi); \\ \lambda_2(\varphi, \xi) &= u_2(\varphi - \xi) - u_2(\varphi) + R \sin \alpha \theta(\varphi - \xi) - \\ &- (\alpha - \xi)r \theta(\varphi); \\ \lambda_3(\varphi, \xi) &= R [\cos(\alpha - \xi) - \cos \alpha]. \end{aligned} \quad (4)$$

Выражения (4) совпадают с (5.9)–(5.11) в [1], если учесть, что в данном случае $w_1 = u_1$; $w_2 = u_2$; $u_3 = 0$; $\mu = \xi$; $b = \beta = 0$.

Подставляя соотношения (4) в (1) с удержанием коэффициентов порядка не выше α^2 перед малыми отклонениями и свободные члены порядка не выше α^3 (в результате интегрирования при вычислении составляющих реакции связи в пределах от 0 до 2α порядок коэффициентов перед малыми отклонениями повысится на единицу), получаем

$$\begin{aligned} q_1(\varphi, \xi) &= [c_1 + (c_3 - c_1)(\alpha - \xi)^2] [u_1(\varphi - \xi) - u_1(\varphi)] + \\ &+ R \xi (\alpha - \xi) (\xi - 2\alpha) (3c_3 - 2c_1) / 6; \\ q_2(\varphi, \xi) &= c_2 [u_2(\varphi - \xi) - u_2(\varphi) + R \alpha \theta(\varphi - \xi) - \\ &- (\alpha - \xi) R \theta(\varphi)]; \\ q_3(\varphi, \xi) &= (c_1 - c_3) (\alpha - \xi) [u_1(\varphi - \xi) - u_1(\varphi)] + \\ &+ c_3 R \xi (2\alpha - \xi) / 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Графики для q_1 и q_3 в невозмущенном движении приведены на рис. 1, а. В выражении для $q_1(\varphi, \xi)$ можно в некоторых случаях опустить член $(c_3 - c_1)(\alpha - \xi)^2$ в сравнении с c_1 .

Подставляя полученные значения (5) в выражения (4.1) [1], найдем

$$\begin{aligned} P_1(\varphi) &= R \int_0^{2\alpha} [c_1 + (c_3 - c_1)(\alpha - \xi)^2] [u_1(\varphi - \xi) - u_1(\varphi)] d\xi; \\ P_2(\varphi) &= R c_2 \int_0^{2\alpha} [u_2(\varphi - \xi) - u_2(\varphi) + R \alpha \theta(\varphi - \xi)] d\xi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_3(\varphi) &= R(c_1 - c_3) \int_0^{2\alpha} (\alpha - \xi) [u_1(\varphi - \xi) - u_1(\varphi)] d\xi + \frac{2}{3} c_3 R^2 \alpha^3; \\
M_1(\varphi) &= \frac{c_3}{2} R^2 \int_0^{2\alpha} \xi (2\alpha - \xi) [u_2(\varphi - \xi) - u_2(\varphi) + \\
&+ \alpha R \theta(\varphi - \xi)] d\xi + R \cos \alpha P_2(\varphi); \\
M_2(\varphi) &= -R^2 \int_0^{2\alpha} [u_1(\varphi - \xi) - u_1(\varphi)] [(c_1 - c_3)(\alpha - \xi)^2 + \\
&+ \frac{c_3}{2} \xi (2\alpha - \xi)] d\xi - R \cos \alpha P_1(\varphi) - M_T \text{sign}(\dot{\varphi}); \\
M_3(\varphi) &= c_2 R^2 \int_0^{2\alpha} [u_2(\varphi - \xi) + \alpha R \theta(\varphi - \xi)] (\alpha - \xi) d\xi - \\
&- \frac{2}{3} c_2 R^3 \alpha^3 \theta(\varphi).
\end{aligned} \tag{6}$$

В выражении для $M_2(\varphi)$ добавлено слагаемое M_T — момент реакции связи в свободном режиме движения, когда $P_1 = 0$. Эта величина является еще одним параметром модели, также как c_1 , c_2 , c_3 , R и 2α . Если не вводить M_T , то в невозмущенном движении получилось бы $M_2 = 0$ наряду с $P_1 = M_2 = M_1 = M_3 = 0$ и $P_3 = 2R^2 \alpha^3 c_3 / 3$. Это объясняется тем, что приведенная выше модель деформируемого колеса характеризуется диссипацией энергии за пределами области контакта, а также тем, что мы пренебрегаем здесь проскальзыванием в области контакта, хотя и весьма малым. Слагаемое M_T позволяет просто учесть диссипацию энергии в свободном режиме. Дело в том, что в первом приближении рассеивание энергии при качении, когда $P_1 = 0$, можно объяснить за счет сухого трения элементов деформируемого колеса. Очевидно, что наибольшие деформации имеют место в направлении орта \vec{e}_3 и поэтому такое рассеивание энергии можно считать в первую очередь следствием деформаций λ_3 .

Механизм внутреннего трения для различных деформируемых колес может существенно отличаться. Чтобы выяснить физическую сущность явления, достаточно воспользоваться простейшей моделью внутреннего трения, например, следующего вида. Предположим, что элементы периферии, перемещающиеся по вертикали вследствие деформации λ_3 , скользят относительно срединной плоскости колеса и при этом прижимаются к ней так, что возникает сухое трение. На рис. 1, б показаны деформации λ_3 в двух положениях колеса. Из рисунка видно, что в пределах $0 \leq \xi < \alpha$

элементы периферии смещаются вверх по отношению к срединной плоскости, а в пределах $2\alpha \geq \xi > \alpha$ — вниз. В результате возникает в первом приближении распределенное давление q_3^* , действующее на колесо со стороны опорной плоскости. Действительно, для перемещения элемента периферии вверх при наличии сухого трения необходимо приложить силу, направленную вверх. Очевидно, что $|q_3^*|$ зависит от "коэффициента" внутреннего трения и от сил, с которыми элемент прижимается к введенной здесь плоскости. Все эти факторы приводят к возникновению одного дополнительного момента M_T , который является моментом реакции связи в режиме движения, когда $P_1=0$, и одновременно моментом трения качения в этом режиме. Это означает, что вдоль орта \vec{e}_2 действует дополнительная составляющая $-M_T \text{sign}(\dot{\varphi})$.

Выше был показан один из возможных вариантов объяснения возникновения момента трения качения в свободном режиме качения. Конечно, детали процесса взаимодействия проскальзывающих внутренних элементов периферии и связанная с этим проскальзыванием форма петли гистерезиса в действительности гораздо сложнее. Однако каковы бы ни были эти особенности, они всегда приводят к одному и тому же интегральному результату, а именно, к возникновению рассмотренного момента, являющегося мерой рассеивания энергии в режиме качения $P_1=0$. Ясно, что мощность диссипации энергии в этом режиме равна $M_T \dot{\varphi}$.

Заметим, что теоретическое определение M_T требует знания многих параметров внутреннего трения, которые также определяются экспериментальным путем. Не отвергая ценности детального рассмотрения, укажем на то, что проще найти M_T из опыта, так как последнее требует нахождения только одного параметра, каковым и является величина M_T . Последняя может быть найдена, например, из опыта Кулона, который использовал нить, намотанную на вал свободного колеса, с двумя подвешенными на ее концах грузами.

В качестве примера рассмотрим движение при постоянных силах по следующему закону:

$$x_c(\varphi) = (r + \Delta_1)\varphi; \quad y_c(\varphi) = \Delta_2\varphi; \quad \theta = 0;$$

$$\Delta_1 = \text{const}; \quad \Delta_2 = \text{const},$$

что дает с использованием соотношений (2) и (6) и удерживанием членов порядка не выше ω^4 следующее выражение для составляющих реакции опорной плоскости, приведенных к центру колеса:

$$\left. \begin{aligned}
 P_1 &= -2c_1 \alpha^2 R \Delta_1 [1 + \alpha^2 (c_3 - c_1) / 3c_1]; \\
 P_2 &= -2c_2 \alpha^2 R \Delta_2; \\
 P_3 &= \frac{2}{3} c_3 R^2 \alpha^3 [1 + \Delta_1 (c_1 - c_3) / R c_3]; \\
 M_1 &= -\frac{2}{3} c_3 R^2 \alpha^4 \Delta_2 + R (1 - \alpha^2 / 2) P_2; \\
 M_2 &= -R (1 - \alpha^2 / 2) P_1 + \frac{2}{3} c_1 R^2 \alpha^4 \Delta_1 - M_T; \\
 M_3 &= \frac{2}{3} \alpha^3 R^2 c_2 \Delta_2.
 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

При этом $u_1(\varphi) = \Delta_1 \varphi$; $u_2(\varphi) = \Delta_2 \varphi$; $\theta = 0$.

Для момента с осью в направлении орта \vec{e}_2 и проходящей через центр области контакта получаем $M_{2K} = \frac{2}{3} c_1 R^2 \alpha^4 \Delta_1 - M_T$.

Таким образом, знак указанного момента зависит при достаточно больших Δ_1 не от направления вращения, а от знака Δ_1 . Это явление подтверждается экспериментом, описанным в работе [4], где отмечается, что в тормозном режиме (ему здесь соответствует $\Delta_1 > 0$) этот момент направлен по ходу вращения колеса, а не против.

Отметим также аналогию между выражениями для P_1 и P_2 . Подводящая к колесу мощность, если удерживать члены порядка не выше α^4 , оказывается равной

$$\begin{aligned}
 N &= N^I + N^{II}; \\
 N^I &= -P_2 \Delta_2 \dot{\varphi} = 2c_2 \alpha^2 R \Delta_2^2 \dot{\varphi}; \\
 N^{II} &= -[P_1 (r + \Delta_1) + M_2] \dot{\varphi} = (-P_1 \Delta_1 + M_T) \dot{\varphi} = \\
 &= 2c_1 \alpha^2 R \Delta_1^2 [1 + (c_3 - c_1) \alpha^2 / 3c_1] \dot{\varphi} + M_T \dot{\varphi}.
 \end{aligned} \quad (8)$$

Для случая качения колеса в своей срединной плоскости может быть установлена связь с известными экспериментальными фактами в [4]. Так как $\Delta_1 = r_K - r$, где r_K — радиус качения колеса, то выражения для P_1 и M_2 можно представить в таком виде

$$P_1 = -\xi_1^0 (r_K - r); \quad M_2 = \xi_2^0 (r_K - r) - M_T; \quad (\dot{\varphi} > 0).$$

Заметим, что здесь P_1 и M_2 составляющие реакции опорной плоскости, приведенные к оси колеса. В теории автомобиля рассматривается также крутящий момент, приложенный к оси колеса

$$M_2' = -M_2 = -\xi_2^0 (r_K - r) + M_T.$$

Коэффициенты ξ_1^0 , ξ_2^0 и M_T обычно определяются экспериментально. В нашем случае

$$\xi_1^0 = 2c_1 \alpha^2 R [1 + (c_3 - c_1) \alpha^2 / 3c_1];$$

$$\xi_2^0 = R (1 - \alpha^2 / 2) \xi_1^0 + \frac{2}{3} c_1 R^2 \alpha^4.$$

Зависимости для P_1 , M_2 и M_2' хорошо согласуются с опытом (см., например, [4], фиг. 11 на с. 34), который подтверждает их линейный характер в функции от Δ_1 .

Приведем также зависимости $P_1 (M_2')$ и $M_2' (P_1)$, которые здесь оказываются следующими:

$$P_1 = (M_2' - M_T) \xi_1^0 / \xi_2^0; \quad M_2' = P_1 \xi_2^0 / \xi_1^0 + M_T.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л е в и н М.А. Определение реакции связей катящегося деформируемого колеса. — Изв. АН СССР. Сер. „Механика твердого тела“, 1977, № 6.
2. Л е в и н М.А. Новая теория бокового увода колеса, приводящая к интегрально-разностным или дифференциально-разностным уравнениям. — В сб.: 25 науч.-техн. конф. БПИ. Материалы секции теоретической и прикладной механики. Мн., 1969.
3. Л е в и н М.А. Теория движения деформируемого колеса при отсутствии увода, приводящая к разностным уравнениям. — В сб.: 26 науч.-техн. конф. БПИ: Материалы секции теоретической и прикладной механики. Мн., 1970.
4. Ч у д а к о в Е.А. Качение автомобильного колеса. — М., 1947.

УДК 531.3+629.11.012.5

М.А.Левин

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОДОЛЬНОЙ РЕАКЦИИ КАТЯЩЕГОСЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО КОЛЕСА

Исследование сил, действующих на катящееся деформируемое колесо со стороны опорной поверхности, составляет предмет теории качения. Уравнения теории качения в динамике транспорт-