где $C_1 = 2(\gamma - 1)\lambda_n^2 \frac{4\pi^2 u^2}{b^2} + \gamma_2 \lambda_n^2 \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} + \gamma \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \frac{4\pi^2 \kappa^2}{b^2}$;

$$\Delta = \frac{i^2}{h^2} + \frac{\kappa^2}{b^2}; \quad \partial_1 = \frac{d}{dx},$$

где b, h – соответственно размеры стержня — параллелепипеда по осям y и z, симметричные относительно начала координат; G — модуль сдвига;

$$\gamma = \frac{2(1-\gamma)}{1-2\gamma}; \quad \gamma_2 = \frac{2\nu}{1-2\nu}.$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона; Y_z^+ — равномерно распределенная нагрузка на грани $z = +\frac{h}{2}$; Y_z^- – равномерно распределенная нагрузка на грани $z = -\frac{h}{2}$; $Y_y^{\pm}$ — соответственно равномерно распределенная нагрузка на гранях $y = \pm\frac{b}{2}$.

Таким образом, решение задачи (1)—(4) представлено сложением решений (10) и (18). Это решение может быть использовано при расчете элемента стержневой системы для указанной в (1)—(4) нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. — Мн., 1967.

УДК 539.3

В.Н. Апанович

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ РИТЦА И ТРЕФТЦА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К НЕКОТОРЫМ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Оценка быстроты сходимости и устойчивости численных методов решения задач теории упругости является необходимым этапом при разработке алгоритмов и программ расчета реальных деталей машин. Ниже представлены основные результаты исследования сходимости и устойчивости метода Ритца (МР) и метода Трефтца (МТ) применительно к расчету объемного напряженно-деформированного состояния.

При решении задач МР и МГ вектор упругих смещений разлагается в ряд $U^N(x_1, x_2, x_3)$ по системе векторных функций $\{\varphi_n(x_1, x_2, x_3)\}_{n=1}^{N}$, т.е.

$$U^N(x_1, x_2, x_3) = \sum_{n=1}^{N} a_n^{(N)} \varphi_n(x_1, x_2, x_3), \tag{1}$$

где $a_n^{(N)}$ — произвольные коэффициенты; N — количество членов в разложении.

Коэффициенты $a_n^{(N)}$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений, получаемой при подстановке (1) в вариационное уравнение Лагранжа [2].

В МР функции $\varphi_n(x_1, x_2, x_3)$ должны удовлетворять кинематическим граничным условиям, требованиям полноты и линейной независимости; в МТ на эти функции накладывается дополнительное требование удовлетворения уравнениям Ляме [1].

В МР для представления вектора смещений использованы обычные степенные ряды, в МТ — полная система полиномиальных решений уравнений теории упругости [3].

Исследование устойчивости и сходимости вышеуказанных методов выполнено путем проведения численных экспериментов на тестовых задачах о сжатии единичного куба с центром в начале координат. Рассмотрены три вида нагружения, когда на боковых гранях вектор правых частей равен нулю, а на верхней и нижней гранях имеет составляющие.

Задача I, $F_n^{в} = \{0,0,-\ \delta(x_1, x_2)\}$, $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0{,}5$;

$F_n^{н} = \{0,0,\ \delta(x_1, x_2)\}$, $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = -0{,}5$,

где (x_1, x_2) — дельта-функция Дирака (единичная сосредоточенная сила);

Задача II, $F_n^{в} = \{0,0,-\cos\pi x_1 \cos\pi x_2\}$, $x_3 = 0{,}5$;

$F_n^{н} = \{0,0,+\cos\pi x_1 \cos\pi x_2\}$, $x_3 = -0{,}5$

(задача Филоненко-Бородича).

Задача III, $F_n^{в} = \{0,0,-1\}$; $x_3 = 0{,}5$; $F_n^{н} = \{0,0,1\}$; $x_3 = -0{,}5$

(единичная равномерно распределенная нагрузка).

Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^6$, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$. Все расчеты проведены по программе, составленной на алгоритмическом языке Фортран — IV. Система алгебраических уравнений решалась методом исключения Гаусса.

2 Зак. 5616

В соответствии с описанной методикой составлялись разрешающие системы уравнений для различных максимальных степеней аппроксимирующих полиномов (n_{max} = 1, 3, 5, 7, 9), при этом в разложении (1) сохранялись только те члены, которые удовлетворяли соответствующим условиям четности для перемещений.

Таблица 1

Методы решения	n_{max}	N	Задача I		Задача II	
			$F(U^N)$	Δ, %	$F(U^N)$	Δ, %
Ритца	1	3	6,6499989	—	0,1067665	—
	3	12	1,506790	20,3	0,132996	17,6
	5	30	2,290858	18,6	0,1400663	4,91
	7	60	3,227960	22,2	0,1415734	1,04
	9	105	4,209484	23,3	0,1438735	1,60
Трефтца	1	3	0,6499998	—	0,1067665	—
	3	9	1,487163	23,9	0,1323946	18,0
	5	18	2,121183	18,1	0,1396968	5,15
	7	30	2,823641	20,0	0,1414508	1,23
	9	42	3,500344	19,3	0,1417266	0,194

Таблица 2

n_{max}	Det	
	Метод Ритца	Метод Трефтца
1	$0{,}259\cdot10^{-2}$	$0{,}347\cdot10^{4}$
3	$0{,}162\cdot10^{-9}$	$0{,}370\cdot10^{5}$
5	$0{,}165\cdot10^{-65}$	$0{,}243\cdot10^{-2}$
7	0,000	$0{,}249\cdot10^{-25}$
9	0,000	$0{,}971\cdot10^{-56}$

Этим обеспечивалась корректность постановки задач. Для оценки быстроты сходимости решения по энергии [4] в каждом приближении определялась энергия деформации тела $F_{n_{max}}(U^N)$ (n_{max} = 1, 3, 5, 7, 9) по формуле

$$F_{n_{max}}(U^N) = \sum_{i=1}^{N} (F_n, \varphi_i) a_i .$$

В табл. 1 для задач I и II приведены значения $F_{n_{max}}(U^N)$ и относительного изменения энергии деформации Δ , вычисляемого по формуле

$$\Delta = \frac{F_i(U^N) - F_{i-1}(U^N)}{F_9(U^N)} \cdot 100\%, \ (i = 3, 5, 7, 9) .$$

В задаче III для всех n_{max} получено тривиальное решение (решение сопромата), поэтому результаты не приводятся. Устойчивость решения (обусловленность матрицы системы уравнений) исследовалась путем вычисления определителя системы методом квадратных корней Холецкого. В табл. 2 даны значения определителей Det для различных приближений.

Анализ данных табл. 1 и 2 показывает следующее.

1. Для обоих методов скорость сходимости по энергии в значительной степени зависит от гладкости граничных условий. Например, для задачи I (МТ) разность энергий последнего и предпоследнего приближений Δ = 19,3%, для задачи II – Δ = 0,194%.

2. По мере увеличения числа членов в (1) решение задач по МТ быстрее сходится к точному, чем по МР. Например, для n_{max} = 9 система МР состоит из N = 105 уравнений, при этом Δ = 1,59%; в системе МТ N = 42, Δ = 0,194%. Как видим, полная система полиномиальных решений уравнений теории упругости обладает лучшими аппроксимационными свойствами, чем обычные степенные ряды.

3. В МР при n_{max} = 9 происходит потеря устойчивости решения. Определитель системы при этом равен машинному нулю. Особенно отчетливо это явление наблюдается в задаче II, когда при n_{max} = 9 Δ начинает возрастать.

4. МТ более устойчив по сравнению с МР, матрица системы значительно лучше обусловлена (при n_{max} = 5 определитель системы МТ на 63 порядка больше определителя системы МР), с возрастанием n_{max} Δ монотонно убывает.

Поскольку в МТ каждая функция $\varphi_n(x_1, x_2, x_3)$ в разложении (1) точно удовлетворяет уравнениям Ляме, апостериорную оценку погрешности решения задачи можно производить путем вычисле-

Таблица 3

Методы решения	N	Δ_{max}	Δ_0
Трефтца	18 30 42	0,120 0,023 0,025	0,107 0,058 0,041
"Источников"	66 144	0,090 0,045	0,080 —

ния отклонений приближенных значений компонентов напряжений на границе от заданных. В табл. 3 для задачи Филоненко-Бородича даны величины наибольшего отклонения составляющих приближенного и точного решений (Δ_{max}) и максимального значения составляющих. Эти составляющие должны равняться нулю (Δ_0), получаться при решении задачи МТ и методом "источников" [1]. Из табл. 2 следует, что уже при 30 членах в разложении (1) МТ дает лучшие результаты, чем метод "источников" при 144 членах в разложении по фундаментальным решениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексидзе М.А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. — М., 1978. 2. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. — Мн., 1967. 3. Лурье А.И. Полиномиальное представление решений уравнений теории упругости. — В сб.: Проблемы механики твердого деформируемого тела. Л., 1970. 4. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. — М., 1970.

УДК 621.81:539.4

В.Н.Апанович

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОВОРОТНОГО СТОЛА КАРУСЕЛЬНОЙ МАШИНЫ ДЛЯ КОКИЛЬНОГО ЛИТЬЯ

Объектом исследования является один из вновь проектируемых вариантов поворотного стола карусельной машины для кокильного литья. Расчетная схема стола показана на рис. 1. Основными силовыми факторами, действующими на стол, являются изгибающие моменты M_i, создаваемые силой тяжести G_i прикрепленных