ЛИТЕРАТУРА

1. Т и м о щ е н к о С.П. Курс теории упругости. — Киев, 1972. 2. К р у ш е в с к и й А.Е., С к л я р О.Н. Изгиб упругого параллелепипеда при точном выполнении условий отсутствия нагрузки на четырех боковых гранях. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1979, вып. 6.

*УДК 539.3*

**Н.Я.Бойко**

## РАВНОВЕСИЕ УПРУГОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА С ТРЕМЯ СВОБОДНЫМИ ОТ НАГРУЗКИ ГРАНЯМИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ НА ЧЕТВЕРТОЙ ГРАНИ И ИМЕЮЩЕГО НУЛЕВОЕ НОРМАЛЬНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ И ОДНО НУЛЕВОЕ КАСАТЕЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ НА ОСТАВШИХСЯ ДВУХ ГРАНЯХ

Эта задача решается, как задача статики, для упругого параллелепипеда при известных на торцах $z = \pm \frac{h}{2}$ нормальных перемещениях и касательных напряжениях. Как известно, это сочетание краевых условий дает возможность получать решение задачи в замкнутом виде. Имеет следующие краевые условия:

$$\text{при } z = \pm \frac{h}{2} \quad w_z^{\pm} = 0; \tau_{xz} = 0; \tau_{yz} = +Y_z^{\pm}; \tag{1}$$

$$\text{при } y = +\frac{b}{2} \quad \sigma_y = -2Y_y^{+}; \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0; \tag{2}$$

$$\text{при } y = -\frac{b}{2} \quad \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0; \tag{3}$$

$$\text{при } x = \pm\frac{a}{2} \quad \sigma_x = \tau_{yx} = \tau_{zx} = 0. \tag{4}$$

Решение задачи (1) — (4) получается как результат наложения решений двух задач, а именно: задачи сжатия с теми же условиями (4), но

$$\text{при } z = \pm \frac{h}{2} \quad w_z^{\pm} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \tag{1'}$$

$$\text{при } y = +\frac{b}{2} \quad \sigma_y = -Y_y^{+}; \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0; \tag{5}$$

$$\text{при } y = -\frac{b}{2} \quad \sigma_y = +Y_y^{+}; \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0 \tag{6}$$

и задачи изгиба с теми же условиями (1) и (4), но

$$\text{при } y = +\frac{b}{2} \quad \sigma_y = -Y_y^+ \; ; \; \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0 \; ; \tag{7}$$

$$\text{при } y = -\frac{b}{2} \quad \sigma_y = -Y_y^+ \; ; \; \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0 \; . \tag{8}$$

Решение задачи ведется на основе вариационного метода перемещений, используя ряды Фурье, неполнота которых на торцах отрезка устраняется дополнительными членами.

Искомые перемещения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
u &= U_0 + \frac{2z}{h} U_1 + \frac{1}{2}\left(12\frac{z^2}{h^2} - 1\right) U_2 + \\
&+ \sum_{i=1}^{\infty} \left[U_{is} \sin\left(\frac{2\pi iz}{h}\right) + U_{ic} \cos\left(\frac{2\pi iz}{h}\right)\right]; \\
v &= V_0 + \frac{2z}{h} V_1 + \frac{1}{2}\left(12\frac{z^2}{h^2} - 1\right) V_2 + \\
&+ \sum_{i=1}^{\infty} \left[V_{is} \sin\left(\frac{2\pi iz}{h}\right) + V_{ic} \cos\left(\frac{2\pi iz}{h}\right)\right]; \\
w &= W_0 + \frac{2z}{h} W_1 + \frac{1}{2}\left(12\frac{z^2}{h^2} - 1\right) W_2 + \\
&+ \sum_{i=1}^{\infty} \left[W_{is} \sin\left(\frac{2\pi iz}{h}\right) + W_{ic} \cos\left(\frac{2\pi iz}{h}\right)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Зависимость обобщенных перемещений $U_0$, $V_0$, $W_0$, $U_{ic}$, $V_{ic}$, $W_{ic}$, $U_{is}$, $V_{is}$, $W_{is}$ от координаты y представляется аналогично.

Для решения задачи используются объемные уравнения равновесия, полученные из вариационного уравнения равновесия элементарного столбика тела [1], раскрытого для разложений по координате z (формула (9)).

Поверхностные уравнения являются следствием удовлетворения краевых условий на гранях $y = \pm \frac{b}{2}$.

Объемные и поверхностные уравнения получены методом ортогонализации.

Все уравнения распадаются на несколько групп, в каждой из которых возможны свои частные задачи.

В общем случае нагрузки для названных краевых условий по граням $y = \pm \frac{b}{2}$ решение указанных задач сводится к решению бесконечных систем алгебраических уравнений. Но для частного вида нагрузки (5), (6) для задач сжатия (1′), (4), (5), (6) получаются однородные алгебраические уравнения для определения постоянных и, следовательно, слагаемые с бесконечными суммами в решении задачи пропадают и решение имеет вид:

$$u = -\frac{2\gamma_2}{b\gamma} xV_{01}^*;\quad v = \frac{2y}{b} V_{01}^*;\quad w = 0;$$

$$\sigma_y = \frac{8(\gamma-1)G}{\gamma b} V_{01}^*;\quad \sigma_z = \frac{4\gamma_2 G}{\gamma b} V_{01}^*;\ \sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{yz} =$$

$$= \tau_{zx} = 0.$$

Так как $V_{01}^* = -\frac{\gamma b}{16(\gamma-1)G}(Y_y^+ + Y_y^-)$, то окончательно

$$u = \frac{\gamma_2 x}{8(\gamma-1)G}(Y_y^+ + Y_y^-);\ v = -\frac{\gamma y}{8(\gamma-1)G}(Y_y^+ + Y_y^-);\ w=0; \tag{10}$$

$$\sigma_y = -\frac{(Y_y^+ + Y_y^-)}{2};\quad \sigma_z = -\frac{\gamma_2(Y_y^+ + Y_y^-)}{4(\gamma-1)};$$

$$\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0.$$

Решение уравнений задачи изгиба (1), (4), (7), (8) свелось к решению дифференциальных уравнений для определяющих функций $U_{01}$ и $V_{ic2}$. Для функции $U_{01}$ дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{(\gamma-1)b^2\partial_1^2}{2\gamma}\left[\frac{\sin(b\partial_1)}{b\partial_1} - 1\right]V_{01} = \frac{b}{8\gamma Gh}[\sin(b\partial_1)+(\gamma-1)b\partial_1]\times$$

$$\times\int_{-h/2}^{h/2}(Y_y^+ + Y_y^-)\,dz + \frac{1}{2\partial_1 Gh}\sin^2\left(\frac{b\partial_1}{2}\right)\int_{-b/2}^{b/2}(Y_z^+ + Y_z^-)\,dy. \tag{11}$$

Решение уравнения (11) для задачи изгиба имеет вид

$$U_{01} = \sum_{i=1}^{\infty} A_{\tilde{\tilde{n}}01}\,\mathrm{sh}(\lambda_{\tilde{\tilde{n}}}x) + U_{01}^*, \tag{12}$$

где $U_{01}^*$ – частное решение, равное нулю в силу соотношения

$$(Y_z^+ + Y_z^-)b - (Y_y^+ + Y_y^-)h = 0, \tag{13}$$

полученного из условия равновесия параллелепипеда как абсолютно твердого тела для указанной поверхностной нагрузки.

В решении (12) $\lambda_{\tilde{\tilde{n}}}$ — комплексно-сопряженные корни характеристического уравнения

$$\sin(b\lambda_{\tilde{\tilde{n}}}) - b\lambda_{\tilde{\tilde{n}}} = 0. \qquad (14)$$

Для определяющей функции $V_{ic2}$ дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{(\gamma-1)\, b^2 \left(\partial_1^2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2}\right)}{2\gamma} \cdot \left[ \frac{\sin\left(b\sqrt{\partial_1^2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2}}\right)}{b\sqrt{\partial_1^2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2}}} - 1\right] V_{ic2} =$$

$$= - \frac{\gamma_2 b^2 (-1)^i}{6\gamma hG} \sin^2\left(\frac{b\sqrt{\partial_1^2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2}}}{2}\right) (Y_z^+ + Y_z^-). \qquad (15)$$

Решение уравнения (15) для задачи изгиба имеет вид

$$V_{ic2} = \sum_{n=1}^{\infty} D_{\tilde{n}02} \operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda_n^2 + \frac{4\pi^2 i^2}{h^2}}\, x\right) + V_{ic2}^*, \qquad (16)$$

где
$$V_{ic2}^* = - \frac{\gamma_2 h (-1)^i}{8(\gamma-1) G\pi^2 i^2} (Y_z^+ + Y_z^-). \qquad (17)$$

Вид функций $U_{ic1}$, $U_{icks}$, $V_{ic0}$, $V_{ickc}$, $W_{is1}$, $W_{isks}$ определился по $V_{ic2}$ согласно дифференциальным уравнениям.

Комплексные постоянные $A_{\tilde{n}01}$ и $D_{\tilde{n}02}$ подлежат определению из двух самостоятельных систем бесконечных уравнений, полученных при удовлетворении условия (4) методом ортогонализации.

Решение задачи изгиба (1), (4), (7), (8) представим нормальными напряженными:

$$\sigma_x = \frac{\gamma_2 y}{\gamma b}(Y_y^+ + Y_y^-) - \frac{128(\gamma-1)\pi^3}{\gamma b^4} G \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3 \lambda_n A_{\tilde{n}01}}{\left(\lambda_n^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{b^2}\right)^2} \times$$

$$\times \operatorname{ch}(\lambda_n x) \sin\left(\frac{2\pi k y}{b}\right) - \frac{\gamma_2 hb}{2(\gamma-1)\pi}(Y_z^+ + Y_z^-) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^i (-1)^k}{i^2 k} \times$$

$$\times \Delta \sin\left(\frac{2\pi\kappa y}{b}\right)\cos\left(\frac{2\pi i z}{h}\right) + \frac{96\pi G}{\gamma_2 b^3}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa}\kappa C_1\lambda_n^{-2}}{\left(\lambda_n^2 - \frac{4\pi^2\kappa^2}{b^2}\right)^2} D_{\tilde{n}02} \times$$

$$\times \operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda_n^2 + \frac{4\pi^2 i^2}{h^2}}\, x\right)\sin\left(\frac{2\pi\kappa y}{b}\right)\cos\left(\frac{2\pi i z}{h}\right);$$

$$\sigma_y = \frac{y}{b}\left(Y_y^+ + Y_y^-\right) + \frac{32(\gamma-1)\pi G}{\gamma b^2}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa}\kappa\lambda_n^3 A_{\tilde{n}01}}{\left(\lambda_n^2 - \frac{4\pi^2\kappa^2}{b^2}\right)^2}\operatorname{ch}(\lambda_n x)\times$$

$$\times \sin\left(\frac{2\pi\kappa y}{b}\right) - \frac{b}{\pi h}\left(Y_z^+ + Y_z^-\right)\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i}(-1)^{\kappa}}{\kappa}\sin\left(\frac{2\pi\kappa y}{b}\right)\times$$

$$\times \cos\left(\frac{2\pi i z}{h}\right) - \frac{192(\gamma-1)\pi G}{\gamma_2 b^3}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa}\kappa\lambda_n^2 D_{\tilde{n}02}}{\left(\lambda_n^2 - \frac{4\pi^2\kappa^2}{b^2}\right)^2}\times$$

$$\times \operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda_n^2 + \frac{4\pi^2 i^2}{h^2}}\, x\right)\sin\left(\frac{2\pi\kappa y}{b}\right)\cos\left(\frac{2\pi i z}{h}\right);$$

$$\sigma_z = \frac{\gamma_2 y}{\gamma b}\left(Y_y^+ + Y_y^-\right) + \frac{16\gamma_2\pi G}{\gamma b^2}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\kappa}\frac{\kappa\lambda_n A_{\tilde{n}01}}{\left(\lambda_n^2 - \frac{4\pi^2\kappa^2}{b^2}\right)}\times$$

$$\times \operatorname{ch}(\lambda_n x)\sin\left(\frac{2\pi\kappa y}{b}\right) - \frac{h}{\pi b}\left(Y_z^+ + Y_z^-\right)\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i}(-1)^{\kappa}\kappa}{i^2}\times$$

$$\times \sin\left(\frac{2\pi\kappa y}{b}\right)\cos\left(\frac{2\pi i z}{h}\right) + \frac{96\pi G}{\gamma_2 b^3}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa}\kappa D_{\tilde{n}02}}{\lambda_n^2\left(\lambda_n^2 - \frac{4\pi^2\kappa^2}{b^2}\right)}\times$$

$$\times \left(\gamma\frac{4\pi^2 i^2}{h^2} - \gamma_2\lambda_n^2\right)\operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda_n^2 + \frac{4\pi^2 i^2}{h^2}}\, x\right)\sin\left(\frac{2\pi\kappa y}{b}\right)\cos\left(\frac{2\pi i z}{h}\right) -$$

$$-\frac{768(\gamma-1)\pi^3 G}{\gamma_2 b^3 h^2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa}\kappa i^2 D_{\tilde{n}02}}{\left(\lambda_n^2 - \frac{4\pi^2\kappa^2}{b^2}\right)^2}\operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda_n^2 + \frac{4\pi^2 i^2}{h^2}}\, x\right)\times$$

$$\times \sin\left(\frac{2\pi\kappa y}{b}\right)\cos\left(\frac{2\pi i z}{h}\right),$$

где $C_1 = 2(\gamma-1)\lambda_n^2 \frac{4\pi^2 u^2}{b^2} + \gamma_2 \lambda_n^2 \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} + \gamma \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \frac{4\pi^2 \kappa^2}{b^2}$;

$$\Delta = \frac{i^2}{h^2} + \frac{\kappa^2}{b^2}; \quad \partial_1 = \frac{d}{dx},$$

где $b$, $h$ – соответственно размеры стержня — параллелепипеда по осям $y$ и $z$, симметричные относительно начала координат; $G$ — модуль сдвига;

$$\gamma = \frac{2(1-\gamma)}{1-2\gamma}; \qquad \gamma_2 = \frac{2\nu}{1-2\nu}.$$

Здесь $\nu$ — коэффициент Пуассона; $Y_z^+$ — равномерно распределенная нагрузка на грани $z = +\frac{h}{2}$; $Y_z^-$ – равномерно распределенная нагрузка на грани $z = -\frac{h}{2}$; $Y_y^\pm$ — соответственно равномерно распределенная нагрузка на гранях $y = \pm\frac{b}{2}$.

Таким образом, решение задачи (1)—(4) представлено сложением решений (10) и (18). Это решение может быть использовано при расчете элемента стержневой системы для указанной в (1)—(4) нагрузки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. — Мн., 1967.

*УДК 539.3*

**В.Н. Апанович**

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ РИТЦА И ТРЕФТЦА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К НЕКОТОРЫМ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Оценка быстроты сходимости и устойчивости численных методов решения задач теории упругости является необходимым этапом при разработке алгоритмов и программ расчета реальных деталей машин. Ниже представлены основные результаты исследования сходимости и устойчивости метода Ритца (МР) и метода Трефтца (МТ) применительно к расчету объемного напряженно-деформированного состояния.