$$\omega_3 = -\omega; \quad \alpha_0^3 = -1.$$

Прдставив найденные значения коэффициентов в уравнение (26) и произведя преобразования, получим дифференциальные уравнения движения материальной точки по конусу:

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{l} &= l(\omega-\varphi^*)^2\sin^2\beta - g_0\cos\beta - f\frac{l\sin\beta}{\sqrt{\dot{l}^2 + l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\beta}}[l(\omega-\dot{\varphi})^2\cos\beta + \\
&+ g_0]; \\
\ddot{\varphi} &= 2\frac{\omega-\dot{\varphi}}{l}\dot{l} - f\frac{\dot{\varphi}\sin\beta}{\sqrt{\dot{l}^2+l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\beta}}[l(\omega-\dot{\varphi})^2\cos\beta + g_0].
\end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Решение полученной системы с учетом начальных условий и дает уравнение траекторий материальной точки на конусе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахманинов И.И. О движении материальной точки по поверхности. — Киев, 1887. 2. Воронец П.В. Дифференциальное уравнение траектории материальной точки на шероховатой поверхности. — Киев, 1916. 3. Суслов Г.К. Теоретическая механика. — М.-Л., 1946. 4. Сокольников И.С. Тензорный анализ. — М., 1971. 5. Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия. — М., 1963.

УДК 536.24

А.А.Ким

СТАЦИОНАРНОЕ ДИССИПАТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕЛИНЕЙНО ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ СРЕДЫ С ТЕПЛОЗАВИСИМОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

Рассмотрим одномерную задачу при отсутствии продольного градиента давления и нулевых инерционных и конвективных членов в левых частях полных уравнений переноса импульса и тепловой энергии. Положим равными нулю все градиенты скорости и температуры, исключая производные

$$\frac{dT}{dy}; \quad \frac{d^2T}{dy^2}; \quad \frac{dU}{dy}, \qquad (1)$$

где T – абсолютная температура потока.

Тогда имеем уравнение движения продольной составляющей импульса (подстрочные индексы опускаем):

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0. \qquad (2)$$

Примем реологическое уравнение состояния системы

$$\tau^{1/n} = \tau_0^{1/n} + \left(\mu_p \frac{du}{dy}\right)^{1/m}. \qquad (3)$$

Уравнение энергии с учетом диссипации механической энергии

$$\lambda \frac{d^2T}{dy^2} + \frac{du}{dy}\tau = 0. \qquad (4)$$

Зависимость пластической вязкости от температуры выражается следующим образом:

$$\mu_p = \frac{\mu_0}{1+\alpha T} = \frac{\mu_0}{1+\alpha(T-T_0)}. \qquad (5)$$

Граничные условия:

$$\begin{array}{ll} y = 0; & y = h; \\ u = 0; & u = v; \\ T = T_0; & \dfrac{dT}{dy} = 0. \end{array} \qquad (6)$$

Первое граничное условие означает прилипание жидкости к нижней изотермической стенке, соединенной с термостатом, а второе – выражает увлечение среды теплоизолированной верхней стенкой с постоянной скоростью v. Такая ситуация чаще всего встречается в реальных условиях.

Введение безразмерных переменных и комплексов

$$\eta = \frac{y}{h}; \quad T' = \frac{T-T_0}{T_0}; \quad s = \frac{\tau}{\left(\mu_0 \frac{v}{h}\right)^{n/m}}; \quad s_0 = \frac{\tau_0}{\left(\mu_0 \frac{v}{h}\right)^{n/m}}; \qquad (7)$$

$$Br = \frac{\mu_0 v^{\frac{n+m}{m}}}{\lambda T_0}\left(\frac{\mu_0}{h}\right)^{\frac{n-m}{m}}; \quad w = \frac{u}{v}; \quad \beta = \alpha T_0 \qquad (8)$$

дает следующую систему выражений:

$$\frac{ds}{d\eta} = 0; \qquad (9)$$

$$s^{1/n} = s_0^{1/n} + \left(\frac{dw}{d\eta}\right)^{1/m} \left(\frac{1}{\lambda+\beta T}\right)^{1/m}; \tag{10}$$

$$\frac{d^2T}{d\eta^2} + Br\, s\, \frac{dw}{d\eta} = 0 \tag{11}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &\eta = 0; && \eta = 1; \\ &w = 0; && w = 1; \\ &T = 0; && \frac{dT}{d\eta} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

В случае $m = n$ безразмерный параметр s_0 идентичен критерию Ильюшина-Олдройда-Бингама и выражает соотношение между пластической и вязкой диссипациями, т.е. соотношение между энергией, затрачиваемой на разрушение структурного каркаса, и работой вязких касательных напряжений.

Параметр Бринкмана Br в данной формулировке характеризует соотношение интенсивностей диссипативного тепловыделения и теплоотвода в термостат. Величина β является характеристикой температурной зависимости пластической вязкости и выражает влияние фактора неизотермичности на процесс течения.

Из (9) следует

$$s = \text{const} = c_1 > 0. \tag{13}$$

Тогда из (10) и (13) имеем

$$\frac{dw}{d\eta}\,\frac{1}{1+\beta T} = \left(C_1^{1/n} - s_0^{1/n}\right)^m \tag{14}$$

или

$$\frac{dw}{d\eta} = (1+\beta T)\left(C_1^{1/n} - s_0^{1/n}\right)^m. \tag{15}$$

Подстановка (15) в (11) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка относительно искомой температуры:

$$\frac{d^2T}{d\eta^2} + BrC_1\left(C_1^{1/n} - s_0^{1/n}\right)^m \beta T = -\left(C_1^{1/n} - s_0^{1/n}\right)^m C_1 Br. \tag{16}$$

Обозначим

$$C_2 = \left(C_1^{1/n} - s_0^{1/n}\right)^m C_1 > 0. \tag{17}$$

11 Зак. 5616

Тогда приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2T}{d\eta^2} + Br\,C_2\,\beta T = -C_2 Br \tag{18}$$

с граничными условиями

$$T(0) = 0; \quad \frac{dT(1)}{d\eta} = 0\,. \tag{19}$$

Общее решение дифференциального уравнения (18) представим в виде

$$T(\eta) = M_1 \sin\lambda_1\eta + M_2\cos\lambda_1\eta - \frac{1}{\beta}\,, \tag{20}$$

где

$$\lambda_1 = \sqrt{\beta_1 C_2 Br}\,. \tag{21}$$

Дифференцируя (20), получаем

$$\frac{dT}{d\eta} = \lambda_1 M_1 \cos\lambda_1\eta - \lambda_1 M_2 \sin\lambda_1\eta\,. \tag{22}$$

Константы интегрирования определяются граничными условиями (19) в виде

$$M_1 = \frac{1}{\beta}\,\mathrm{tg}\,\alpha\,; \quad M_2 = \frac{1}{\beta}\,. \tag{23}$$

После несложных преобразований получаем искомое распределение температурного поля:

$$T(\eta) = \frac{\cos[(1-\eta)\lambda_1]}{\beta\cos\lambda_1} - \frac{1}{\beta}\,. \tag{24}$$

В выражение (24) входит через величины λ_1 неизвестная величина C_2, связанная с C_1. Для их определения обратимся снова к решению динамической задачи, опираясь на полученный выше профиль скоростей. Тогда имеем

$$1 + \beta T(\eta) = \frac{\cos[(1-\eta)\lambda_1]}{\cos\lambda_1}\,. \tag{25}$$

Подстановка выражения (25) в (15) приводит к

$$\frac{dw}{d\eta} = \frac{C_2}{C_1}\;\frac{\cos[(1-\eta)\lambda_1]}{\cos\lambda_1} \tag{26}$$

или после интегрирования

$$w = D - \frac{C_2}{C_1}\ \frac{\sin[(1-\eta)\lambda_1]}{\lambda_1 \cos\lambda_1}\ . \tag{27}$$

Постоянную D определим из условия прилипания на стенке

$$D = \frac{C_2}{C_1}\ \frac{\operatorname{tg}\lambda_1}{\lambda_1}\ . \tag{28}$$

Таким образом, профиль скоростей поперек зазора имеет вид

$$w(\eta) = \frac{C_2}{C_1}\ \frac{1}{\lambda_1 \cos\lambda_1}\ \left\{\sin\lambda_1 - \sin\,[(1-\eta)\lambda_1]\right\}. \tag{29}$$

Для определения связанных между собой соотношениями (17) и (21) величин C_1, C_2, λ_1 используем второе граничное условие для скоростей, а именно: $w = 1$ при $\eta = 1$. Тогда имеем

$$\frac{C_2}{C_1}\ \frac{\sin\lambda_1}{\lambda_1 \cos\lambda_1} = 1\ . \tag{30}$$

Подстановка выражения (17) и (20) в соотношение (30) приводит к виду

$$\operatorname{tg}\left\{[\beta \mathrm{Br}\, C_1 (C_1^{1/n} - s_0^{1/n})^m]\right\} = [(C_1^{1/n} - s_0^{1/n})^m]\, [\beta \mathrm{Br} (C_1^{1/n} - s_0^{1/n})^m C_1]^{½}\ . \tag{31}$$

Выражение (31) является определяющим уравнением данной задачи. Оно трансцендентное относительно величины C_1 (безразмерное касательное напряжение). Определив его, находим сопротивление трения в боковом направлении.

Теперь возвращаемся к задаче теплообмена. Определив температуру на верхней стенке

$$T(1) = \frac{1-\cos\lambda_1}{\beta\cos\lambda_1}\ , \tag{32}$$

находим изменение температурного перепада между верхней и нижними стенками:

$$\Delta T = \frac{1-\cos\lambda_1}{\beta\cos\lambda_1} = T(1)\ . \tag{33}$$

Тепловой поток в нижнюю стенку

$$q = -\left.\frac{dT}{d\eta}\right|_{\eta=0} = \frac{\lambda_1 \operatorname{tg}\lambda_1}{\beta}\ . \tag{34}$$

Таким образом, определены все искомые зависимости для сопротивления и теплообмена.

В том случае, если на верхней стенке задано касательное напряжение, а не скорость, задача значительно упрощается. Тогда величина C_1 и, следовательно, C_2 и λ_1 определяются непосредственно из задания граничных условий. Тогда температурное поле определяется из выражения (20).

Формула (32) устанавливает связь равновесной температуры адиабатической стенки с реологическими характеристиками среды, зависящими от состава композиции.

Формула (33) выражает зависимость температурного напора между ограничивающими течение стенками и остальными переменными задачами. Это соотношение имеет важное значение, поскольку, пользуясь им, легко предвычислить безопасные, либо оптимальные с точки зрения производительности и экономичности режимы течения и теплоотвода. Задаваясь определенной допустимой величиной ΔT, можно определить соответствующие критические величины $v_{кр}$ при фиксированном зазоре h, либо высоту зазора $h_{кр}$ при заданной скорости движения верхней стенки.

Равенство (34) определяет количество тепла, отводимого в термостат при стационарном режиме течения. Оно для заданных условий задачи должно быть равно мощности теплового рассеяния, т.е. вязкой диссипации.