

ние порядка зависимостей для реакций связей катящегося деформируемого колеса. — "ДАН БССР", 1974, № 6, т. 18. 5. О ч а н М.Ю., Р о ж к о в В.И. Исследование нестационарного режима и устойчивости движения нити при передаче окружного усилия. — В сб.: Механика машин, 1978, вып. 53.

УДК 531.325.531.355

Л.К.Рапинчук

### ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПО ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Рабочие органы многих сельскохозяйственных машин представляют собой сочетание двух пересекающихся поверхностей, подвижных или неподвижных друг относительно друга. Например, диск с жестко укрепленной на нем лопаткой в центробежном разбрасывателе, шнек, представляющий собой сочетание геликоида и цилиндра.

Пусть уравнения поверхностей заданы в ортогональных декартовых системах координат, жестко связанных с поверхностями:

$$\psi_I(x_I^j) = 0 \quad \text{и} \quad \psi_{II}(x_{II}^j) = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Римскими индексами I и II будем обозначать объекты, принадлежащие соответственно первой или второй поверхности и жестко связанным с ними координатным системам. Объекты, у которых отсутствуют римские индексы, будем считать принадлежащими обоим поверхностям или любой из них.

Координаты неподвижной (абсолютной) системы выражаются через координаты подвижных (относительных) систем равенствами

$$\begin{aligned} X^i &= X_{I0}^i + \alpha_{Ij}^i x_I^j; \\ X^i &= X_{II0}^i + \alpha_{IIj}^i x_{II}^j, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $X_{I0}^i$ ,  $X_{II0}^i$  — координаты начала координат относительных систем в абсолютной;  $\alpha_{Ij}^i$  и  $\alpha_{IIj}^i$  — коэффициенты преобразований координат.

Равенства (2) записаны с использованием соглашения о суммировании, применяемого в тензорном исчислении [1], согласно которому суммирование производится по двум одинаковым индексам, называемыми немymi. Индексы объектов во внешнем трехмерном пространстве будем обозначать малыми латинскими

буквами, на поверхности — греческими. Таким образом, всякий немой (повторяющийся) малый латинский индекс означает суммирование от 1 до 3, греческий — от 1 до 2. Свободные (неповторяющиеся) малые латинские индексы пробегают значение от 1 до 3, греческие — от 1 до 2. В дальнейшем вышесказанное предполагается, если не будет особых оговорок относительно индексов.

Выразим относительные координаты через абсолютные:

$$\begin{aligned} x_I^j &= (X^i - X_{I0}^i) \tilde{\alpha}_{Ii}^j ; \\ x_{II}^j &= (X^i - X_{II0}^i) \tilde{\alpha}_{IIi}^j , \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\tilde{\alpha}_{Ii}^j$ ,  $\tilde{\alpha}_{IIi}^j$  — коэффициенты обратных преобразований, определяемых для ортогональных декартовых координат равенствами [2]:

$$\tilde{\alpha}_i^j = \alpha_j^i . \quad (4)$$

Координаты  $X_{I0}$  и  $X_{II0}$  и коэффициенты  $\tilde{\alpha}_{Ii}^j$  и  $\tilde{\alpha}_{IIi}^j$  являются функциями времени. Поэтому, подставив значения координат из равенств (3) в уравнение (1), получим

$$\left. \begin{aligned} \psi_I(X^i, t) &= 0 ; \\ \psi_{II}(X^i, t) &= 0 . \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Система (5) определяет линию пересечения поверхностей.

Введем параметризацию

$$X^i = X^i(\eta, t) , \quad (6)$$

превращающую равенство (5) в тождества. Тогда равенства (6) будут представлять собой уравнение линии пересечения двух поверхностей в параметрической форме.  $X^i$  можно рассматривать и как координаты материальной точки, находящейся на линии пересечения поверхностей. Дифференцируя дважды по времени, получим проекции скорости и ускорения материальной точки:

$$\begin{aligned} \dot{X}^i &= \frac{\partial X^i}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial X^i}{\partial t} ; \\ \ddot{X}^i &= \frac{\partial X^i}{\partial \eta} \ddot{\eta} + \frac{\partial^2 X^i}{\partial \eta^2} \dot{\eta}^2 + 2 \frac{\partial^2 X^i}{\partial \eta \partial t} \dot{\eta} + \frac{\partial^2 X^i}{\partial t^2} . \end{aligned} \quad (7)$$

Приняв параметр  $\eta$  за обобщенную координату, запишем уравнение движения материальной точки по линии пересечения двух поверхностей в форме уравнения Лагранжа второго рода [3]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\eta}} - \frac{\partial (\Gamma + U)}{\partial \eta} = Q, \quad (8)$$

где  $\Gamma$  – кинетическая энергия материальной точки;  $U$  – потенциал силовой функции гравитационного поля;  $Q$  – обобщенная сила;

$$\Gamma = \frac{m}{2} \dot{X}^i \dot{X}^i;$$

$$U = m g_0 \alpha_0^i X^i, \quad (9)$$

где  $m$  – масса точки;  $g_0$  – модуль ускорения свободного падения тел;  $\alpha_0^i$  – направляющие косинусы силы тяжести в осях абсолютной системы координат.

Найдя частные производные от кинетической энергии и потенциала по обобщенным координате и скорости, подставим их в уравнение (8). Производя дифференцирование и приведение подобных, получим

$$m \left( \frac{\partial X^i}{\partial \eta} \ddot{\eta} + \frac{\partial^2 X^i}{\partial \eta^2} \dot{\eta}^2 + 2 \frac{\partial^2 X^i}{\partial \eta \partial t} + \frac{\partial^2 X^i}{\partial t^2} - g_0 \alpha_0^i \right) \frac{\partial X^i}{\partial \eta} = Q. \quad (10)$$

Найдем частные производные от координат линии по обобщенной координате, дифференцируя обе части равенств (2) и считая  $X_0^i$  и  $\alpha_j^i$  зависящими только от времени, а  $x^j$  как от времени, так и от обобщенной координаты:

$$\frac{\partial X^i}{\partial \eta} = \alpha_j^i \frac{\partial x^j}{\partial \eta} = \alpha_j^i \frac{\partial x^j}{\partial q^\sigma} \frac{\partial q^\sigma}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 X^i}{\partial \eta^2} = \alpha_j^i \left( \frac{\partial^2 x^j}{\partial q^\sigma \partial q^\tau} \frac{\partial q^\sigma}{\partial \eta} \frac{\partial q^\tau}{\partial \eta} + \frac{\partial x^j}{\partial q^\sigma} \frac{\partial^2 q^\sigma}{\partial \eta^2} \right);$$

$$\frac{\partial^2 X^i}{\partial \eta \partial t} = \dot{\alpha}_j^i \frac{\partial x^j}{\partial q} \frac{\partial q^\sigma}{\partial \eta} + \alpha_j^i \left( \frac{\partial^2 x^j}{\partial q^\sigma \partial q^\tau \partial \eta} \frac{\partial q^\sigma}{\partial \eta} \frac{\partial q^\tau}{\partial t} + \frac{\partial x^j}{\partial q^\sigma} \frac{\partial^2 q^\sigma}{\partial \eta \partial t} \right); \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X^i}{\partial t^2} &= \ddot{X}_0^i + \dot{\alpha}_j^i x^j + 2 \alpha_j^i \frac{\partial x^j}{\partial q^\sigma} \frac{\partial q^\sigma}{\partial t} + \\ &+ \alpha_j^i \left( \frac{d^2 x^j}{\partial q^\sigma \partial q^\tau} \frac{\partial q^\sigma}{\partial t} \frac{\partial q^\tau}{\partial t} + \frac{\partial x^j}{\partial q^\sigma} \frac{\partial^2 q^\sigma}{\partial t^2} \right), \end{aligned}$$

где  $q^\sigma$  – внутренние координаты поверхности, координаты местных (локальных) двумерных базисов, выбор которых определяется тем, что параметризация  $x^j = x^j(q^\sigma)$  превращает уравнения (1)

в тождества;  $q^\sigma = \dot{q}^\sigma(\eta, t)$  – уравнение линии пересечения поверхностей в параметрической форме во внутренних координатах местных (локальных) базисов поверхностей, первой или второй.

Подставив частные производные из равенств (11) в уравнение (10), найдя их свертки с  $\frac{\partial x^i}{\partial \eta}$  и произведя преобразования, получим:

$$m \left\{ g_{\sigma\tau} \left[ \frac{\partial q^\sigma}{\partial \eta} \ddot{\eta} + \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma \left( \frac{\partial q^\lambda}{\partial \eta} \frac{\partial q^\mu}{\partial \eta} \dot{\eta}^2 + 2 \frac{\partial q^\lambda}{\partial \eta} \frac{\partial q^\mu}{\partial t} \dot{\eta} + \frac{\partial q^\lambda}{\partial t} \frac{\partial q^\mu}{\partial t} \right) \right] + \right. \\ \left. + 2\omega^b d_{\alpha}^{\sigma 1} \left( \frac{\partial q^\alpha}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial q^\alpha}{\partial t} \right) + \frac{\partial^2 q^\sigma}{\partial \eta^2} \dot{\eta}^2 + 2 \frac{\partial^2 q^\sigma}{\partial \eta \partial t} \dot{\eta} + \frac{\partial^2 q^\sigma}{\partial t^2} \right\} + (\ddot{X}_0^i + \ddot{\alpha}_j^i - g_0 \alpha_0^i) \times \\ \times \alpha_k^i \frac{\partial x^k}{\partial q^\tau} \left. \right\} \frac{\partial q^\tau}{\partial \eta} = Q, \quad (12)$$

где  $g_{\sigma\tau} = \frac{\partial x^j}{\partial q^\sigma} \frac{\partial x^j}{\partial q^\tau}$  – первый, метрический, тензор поверхности;

$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = g^{\sigma\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial q^\alpha} \frac{\partial^2 x^j}{\partial q^\lambda \partial q^\mu}$  – коэффициент связности внутренней гео-

метрии поверхностей, символы Кристоффеля второго рода;  $g^{\sigma\alpha} = \frac{G^{\sigma\alpha}}{g}$  – тензор, взаимный метрическому;  $g$  – определитель метрического тензора;  $G^{\sigma\alpha}$  – алгебраическое дополнение элемента метрического тензора  $g_{\sigma\alpha}$  в определителе  $|g_{\sigma\alpha}|$ ;

$d_{\alpha}^{\sigma 1} = \pm \epsilon_{\alpha}^{\sigma} \cdot n^1$  – контравариантный тензор во внешнем пространстве и ковариантный тензор на поверхности;  $n^1 = \pm \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial x^j}{\partial q^1} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial q^2} - \frac{\partial x^k}{\partial q^1} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial q^2} \right) -$

координаты единичного вектора в относительной системе координат ( $j, k, l$  – циклическая перестановка чисел 1,2,3); верхний знак плюс соответствует случаю, когда единичный вектор нормали образует правый репер с координатными векторами местного базиса (это правило имеет место для всех коэффициентов, знаки которых зависят от ориентации местного базиса);  $\dot{\epsilon}_1^1 =$

$= -\frac{g_{12}}{\sqrt{g}}$ ;  $\dot{\epsilon}_2^1 = -\frac{g^{22}}{\sqrt{g}}$ ;  $\dot{\epsilon}_1^2 = \frac{g_{11}}{\sqrt{g}}$ ;  $\epsilon_2^2 = \frac{g_{12}}{\sqrt{g}}$  – компоненты

тензора на поверхности;  $\omega^l = \alpha_i^i \alpha_{k,l}^i$  – координаты вектора угловой скорости ( $j, k, l$  – циклическая перестановка чисел 1,2,3).

Обобщенную силу определим из выражения элементарных работ на виртуальном перемещении  $\delta s$  точки, приняв во внимание лишь непотенциальные силы, т.е. силы трения. Тогда

$$\delta A = -(F_{\text{трI}} \cos \varepsilon_I + F_{\text{трII}} \cos \varepsilon_{II}) \delta s = -(F_{\text{трI}} \cos \varepsilon_I + F_{\text{трII}} \cos \varepsilon_{II}) \sqrt{g_{\sigma\tau} \frac{\partial q^\sigma}{\partial \eta} \frac{\partial q^\tau}{\partial \eta}} \delta \eta, \quad (13)$$

где  $F_{\text{трI}}, F_{\text{трII}}$  — тангенциальные составляющие реакций поверхностей, силы трения;  $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}$  — углы между касательной к линии пересечения поверхностей и направлениями относительных перемещений точки по поверхностям (рис. 1).

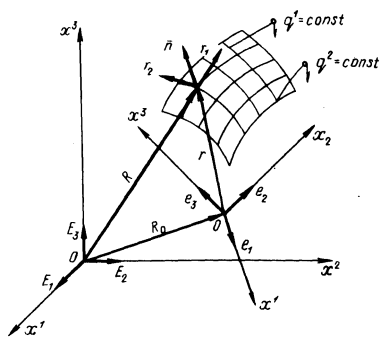


Рис. 1. Схема действия реакций поверхностей на материальную точку.

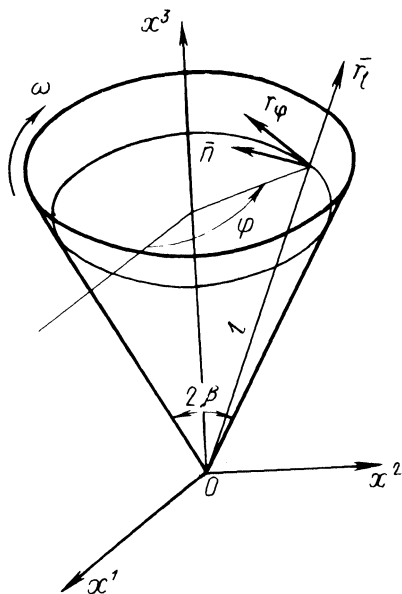


Рис. 2. Диск с криволинейной лопаткой.

Выражение, стоящее перед обобщенным виртуальным перемещением и будет обобщенной силой.

$$Q = -(F_{\text{трI}} \cos \varepsilon_I + F_{\text{трII}} \cos \varepsilon_{II}) \sqrt{g_{\sigma\tau} \frac{\partial q^\sigma}{\partial \eta} \frac{\partial q^\tau}{\partial \eta}}. \quad (14)$$

Скорость точки в относительном перемещении ее по поверхности

$$v = \dot{q}^{\sigma} \bar{r}_{\sigma} = \left( \frac{\partial q^{\sigma}}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial q^{\sigma}}{\partial t} \right) \bar{r}_{\sigma} \quad (15)$$

где  $\bar{r}_{\sigma}$  – координатные векторы локальных базисов поверхностей.

Единичный вектор касательной к линии пересечения поверхностей

$$\bar{\tau} = \frac{dq^{\sigma} \bar{r}_{\sigma}}{|dq^{\sigma} \bar{r}_{\sigma}|} = \frac{\frac{\partial q^{\sigma}}{\partial \eta}}{\sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{\partial q^{\alpha}}{\partial \eta} \frac{\partial q^{\beta}}{\partial \eta}}} \bar{r}_{\sigma} \quad (16)$$

Тогда

$$\cos \varepsilon = \frac{\bar{\tau} \bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{g_{\sigma\tau} \left( \frac{\partial q^{\sigma}}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial q^{\sigma}}{\partial t} \right) \frac{\partial q^{\tau}}{\partial \eta}}{\sqrt{g_{\alpha\rho} \frac{\partial q^{\alpha}}{\partial \eta} \frac{\partial q^{\rho}}{\partial \eta} \sqrt{g_{\lambda\mu} \left( \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial \eta} \frac{\partial q^{\mu}}{\partial \eta} \dot{\eta}^2 + 2 \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial \eta} \frac{\partial q^{\mu}}{\partial t} + \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial t} \frac{\partial q^{\mu}}{\partial t} \right)}} \quad (17)$$

Спроектируем все силы, действующие на материальную точку, на направление нормалей к поверхностям.

$$\left. \begin{aligned} N_I + N_{II} \cos \gamma - F_{II} \cos \psi_{II} &= m (\ddot{X}^i - g_0 \alpha^i_0) \alpha^i_{Ij} n^j_I ; \\ N_I \cos \gamma + N_{II} - F_I \cos \psi_I &= m (\ddot{X}^i - g_0 \alpha^i_0) \alpha^i_{IIj} n^j_{II} , \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где  $N_I, N_{II}$  – нормальные составляющие реакций поверхностей на материальную точку;  $\gamma$  – угол между нормальями к поверхностям;  $\psi_I, \psi_{II}$  – углы между нормалью к поверхности и направлением перемещения точки по другой поверхности.

$$\cos \gamma = \bar{n}_I n_{II} = \alpha^i_{Ij} \alpha^i_{IIk} n^j_I n^k_{II} .$$

$$\cos \psi_I = \frac{\bar{v}_I \bar{n}_{II}}{|\bar{v}_I|} = \frac{\left( \frac{\partial q_I^{\sigma}}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial q_I^{\sigma}}{\partial t} \right) \frac{\partial x^j_I}{\partial q_I^{\sigma}} \alpha^i_{Ij} \alpha^i_{Ik} n^k_{II}}{\sqrt{g_{\lambda\mu} \left( \frac{\partial q_I^{\lambda}}{\partial \eta} \frac{\partial q_I^{\mu}}{\partial \eta} \dot{\eta}^2 + 2 \frac{\partial q_I^{\lambda}}{\partial \eta} \frac{\partial q_I^{\mu}}{\partial t} \dot{\eta} + \frac{\partial q_I^{\lambda}}{\partial t} \frac{\partial q_I^{\mu}}{\partial t} \right)}} \quad (19)$$

$$\cos \psi_{II} = \frac{\bar{v}_{II} \bar{n}_I}{|\bar{v}_{II}|} = \frac{\left( \frac{\partial q_{II}^{\sigma}}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial q_{II}^{\sigma}}{\partial t} \right) \frac{\partial x^j_{II}}{\partial q_{II}^{\sigma}} \alpha^i_{Ij} \alpha^i_{Ik} n^k_I}{\sqrt{g_{\lambda\mu} \left( \frac{\partial q_{II}^{\lambda}}{\partial \eta} \frac{\partial q_{II}^{\mu}}{\partial \eta} \dot{\eta}^2 + 2 \frac{\partial q_{II}^{\lambda}}{\partial \eta} \frac{\partial q_{II}^{\mu}}{\partial t} \dot{\eta} + \frac{\partial q_{II}^{\lambda}}{\partial t} \frac{\partial q_{II}^{\mu}}{\partial t} \right)}} \quad (20)$$

Угол  $\psi$  может быть определен как плоский угол трехгранного угла, две грани у которого взаимно ортогональны

$$\cos \psi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = \sin \gamma \sin \varepsilon. \quad (21)$$

Учитывая, что при наличии относительного перемещения точки по поверхности  $F_{\text{тр}} = fN$ , где  $f$  – коэффициент трения, найдем из системы (18):

$$N_I = m \frac{\alpha_{Ij}^i \dot{n}_I^j - \alpha_{IIj}^i \dot{n}_{II}^j (\cos \gamma - f_{II} \cos \psi_{II})}{1 - (\cos \gamma - f_I \cos \psi_I) (\cos \gamma - f_{II} \cos \psi_{II})} (\ddot{X}^i - g_0 \alpha_0^i),$$

$$N_{II} = m \frac{\alpha_{Ij}^i \dot{n}_{II}^j - \alpha_{Ij}^i \dot{n}_I^j (\cos \gamma - f_I \cos \psi_I)}{1 - (\cos \gamma - f_I \cos \psi_I) (\cos \gamma - f_{II} \cos \psi_{II})} (\ddot{X}^i - g_0 \alpha_0^i). \quad (22)$$

Подставив значения частных производных из выражений (11) во второе из равенств (7), определим ускорение материальной точки. Подставив его в равенство (22), определим силы трения и подставим их в равенство (14). Полученное значение обобщенной силы подставим в уравнение (12). Разделив правую и левую части полученного уравнения на  $m$ , получим дифференциальное уравнение движения материальной точки по линии пересечения двух поверхностей:

$$\left\{ g_{\sigma\tau} \left[ \frac{\partial q^\sigma}{\partial \eta} \ddot{\eta} + \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma \left( \frac{\partial q^\lambda}{\partial \eta} \frac{\partial q^\mu}{\partial \eta} \dot{\eta}^2 + 2 \frac{\partial q^\lambda}{\partial \eta} \frac{\partial q^\mu}{\partial t} \dot{\eta} + \frac{\partial q^\lambda}{\partial t} \frac{\partial q^\mu}{\partial t} \right) + \right. \right.$$

$$+ 2\omega^1 c_1^\sigma \left( \frac{\partial q^\alpha}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial q^\alpha}{\partial t} \right) + \frac{\partial^2 q^\sigma}{\partial \eta^2} \dot{\eta}^2 + 2 \frac{\partial^2 q^\sigma}{\partial \eta \partial t} \dot{\eta} + \frac{\partial^2 q^\sigma}{\partial t^2} \left. \right] +$$

$$+ (\ddot{X}_0^i + \ddot{z}_j^i x_j - g_0 \alpha_0^i) \alpha_{\kappa}^i \frac{\partial x^\kappa}{\partial q^\tau} \left. \right\} \frac{\partial q^\tau}{\partial \eta} = -a_I [h_I \lambda \mu \left( \frac{\partial q_I^\lambda}{\partial \eta} \frac{\partial q_I^\mu}{\partial \eta} \dot{\eta}^2 + \right.$$

$$+ 2 \frac{\partial q_I^\lambda}{\partial \eta} \frac{\partial q_I^\mu}{\partial t} \dot{\eta} + \frac{\partial q_I^\lambda}{\partial t} \frac{\partial q_I^\mu}{\partial t} \left. \right) + 2\omega_I^1 c_I^\sigma \left( \frac{\partial q_I^\sigma}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial q_I^\sigma}{\partial t} \right) + (\ddot{X}_{I0} - g_0 \alpha_0^i +$$

$$+ \ddot{z}_{Ij}^i x_j^i) \alpha_{\kappa}^i n_{I\kappa}^i \left. \right] - a_{II} [h_{II} \lambda \mu \left( \frac{\partial q_{II}^\lambda}{\partial \eta} \frac{\partial q_{II}^\mu}{\partial \eta} \dot{\eta}^2 + 2 \frac{\partial q_{II}^\lambda}{\partial \eta} \frac{\partial q_{II}^\mu}{\partial t} \dot{\eta} + \frac{\partial q_{II}^\lambda}{\partial t} \frac{\partial q_{II}^\mu}{\partial t} \right) +$$

$$+ 2\omega_{II}^1 c_{II}^\sigma \left( \frac{\partial q_{II}^\sigma}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial q_{II}^\sigma}{\partial t} \right) + (\ddot{X}_{II0} - g_0 \alpha_0^i + \ddot{z}_{IIj}^i x_{IIj}^i) \alpha_{\kappa}^i n_{II\kappa}^i \left. \right],$$

где

$$a_I = \frac{f_I \cos \varepsilon_I - f_{II} \cos \varepsilon_{II} (\cos \gamma - f_I \cos \psi_I)}{1 - (\cos \gamma - f_I \cos \psi_I) (\cos \gamma - f_{II} \cos \psi_{II})} \sqrt{g_{\sigma\tau} \frac{\partial q^\sigma}{\partial \eta} \frac{\partial q^\tau}{\partial \eta}};$$

$$a_{II} = \frac{f_{II} \cos \varepsilon_{II} - f_I \cos \varepsilon_I (\cos \gamma - f_{II} \cos \psi_{II})}{1 - (\cos \gamma - f_I \cos \psi_I) (\cos \gamma - f_{II} \cos \psi_{II})} \sqrt{g_{\sigma\tau} \frac{\partial q^\sigma}{\partial \eta} \frac{\partial q^\tau}{\partial \eta}}; \quad (23)$$

$h_{\lambda\mu} = \frac{\partial^2 x^j}{\partial q^\lambda \partial q^\mu} n^j$  -- второй тензор поверхности;  $c_{\sigma}^j = \frac{\partial x^j}{\partial q^\sigma} n^k - \frac{\partial x^k}{\partial q^\sigma} n^j$  -- ковариантный тензор на поверхности и контравариантный во внешнем пространстве.

Уравнение (23) разрешимо относительно старшей производной  $\ddot{\eta}$ . Для этого нужно разделить левую и правую части его на свертку  $g_{\sigma\tau} \frac{\partial q^\sigma}{\partial \eta} \frac{\partial q^\tau}{\partial \eta}$ . Это уравнение существенно не линейно. Оно содержит те же коэффициенты, что и уравнение движения материальной точки по одной поверхности [4]. При этом в правой части уравнения в первых квадратных скобках стоят величины, зависящие от формы (уравнения) и закона движения первой поверхности, во вторых квадратных скобках -- величины, зависящие от формы и закона движения второй поверхности.

В левую часть уравнения можно подставлять коэффициенты, связанные с одной из поверхностей: или первой, или второй.

Если линия пересечения неподвижна относительно какой-либо поверхности, то соответствующий угол  $\varepsilon$  равен нулю и  $\cos \varepsilon = 1$ . Угол же  $\psi$  между направлением относительного перемещения точки по этой поверхности и нормалью к другой поверхности равен  $\frac{\pi}{2}$  и  $\cos \psi = 0$ . Если поверхности взаимно ортогональны вдоль линии пересечения, то  $\cos \gamma = 0$ . Выражения для определения  $a_I$  и  $a_{II}$  в этих случаях упрощаются.

Уравнение (23) позволяет формализовать составление уравнений движения материальной точки по линии пересечения поверхностей. Оно универсально для любых поверхностей, движущихся с любыми законами. При этом не следует определять ни сил, ни ускорений. Нужно лишь, зная уравнения поверхностей, выбрать параметризацию  $x^j = x^j(q^\sigma)$ ,  $q^\sigma = q^\sigma(\eta)$ , определить коэффициенты поверхностей, большинство которых, кроме  $c_{\sigma}^1$  и  $d_{\alpha}^{\sigma 1}$ , известны из дифференциальной геометрии [5].  $c_{\sigma}^1$  и  $d_{\alpha}^{\sigma 1}$  впервые введены нами [4]. Еще лучше иметь каталог таких коэффициен-

тов, а затем определить коэффициенты, связанные с законом движения поверхностей  $\omega^1, \alpha_K^1, \dot{\alpha}_K^1, \dot{X}_0^1$ .

Пусть, например, нужно составить уравнение движения материальной точки по плоскому горизонтальному диску с укрепленной на нем криволинейной цилиндрической и перпендикулярной ему лопаткой, вращающейся с постоянной частотой вокруг вертикальной оси (рис. 2). Обе поверхности соединены друг с другом. Угол между ними всюду  $\frac{\pi}{2}$ . Поэтому  $\cos \epsilon = 1, \cos \gamma = 0, \cos \psi = 1$ .

Расположим оси координат, как указано на схеме (рис. 2) запишем уравнения поверхностей диска и лопатки:

$$x_I^3 = 0, \quad \Psi_{II}(x_{II}^1, x_{II}^2) = 0. \quad (24)$$

Уравнение лопатки в цилиндрической системе координат может быть представлено в виде  $\varphi = \varphi(\rho)$ .

В качестве внутренних координат диска примем полярные координаты ( $q_I^1 = \rho, q_I^2 = \varphi$ ), лопатки — цилиндрические координаты ( $q_{II}^1 = 2, q_{II}^2 = \rho$ ). За обобщенную координату примем  $\rho$ . Тогда частные производные от внутренних координат по обобщенной

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_I^1}{\partial \eta} = \frac{\partial \rho}{\partial \rho} = 1; \quad \frac{\partial q_{II}^1}{\partial \eta} = \frac{\partial 2}{\partial \rho} = 0; \\ \frac{\partial q_I^2}{\partial \eta} = \frac{d\varphi}{d\rho} = \varphi'; \quad \frac{\partial q_{II}^2}{\partial \eta} = \frac{\partial \rho}{\partial \rho} = 1. \end{aligned} \quad (25)$$

Частные производные от внутренних координат поверхностей по времени равны нулю. Частные производные второго порядка от внутренних координат поверхностей по обобщенной равны ну-

лю, кроме  $\frac{\partial^2 q_I^2}{\partial \eta^2} = \frac{d^2 \varphi}{d\rho^2} = \varphi''$ .

Коэффициенты диска отличные от нуля:

$$x_I^1 = \rho \cos \varphi; \quad x_I^2 = \rho \sin \varphi;$$

$$\frac{\partial x_I^1}{\partial q_I^1} = \cos \varphi; \quad \frac{\partial x_I^2}{\partial q_I^1} = \sin \varphi; \quad \frac{\partial x_I^1}{\partial q_I^2} = -\rho \sin \varphi; \quad \frac{\partial x_I^2}{\partial q_I^2} = \rho \cos \varphi;$$

$$g_{111} = 1; \quad g_{122} = \rho^2; \quad n_1^3 = 1; \quad \Gamma_{122}^1 = -\rho; \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{\rho};$$

(26).

$$c_{I1}^1 = \sin \varphi; c_{I1}^2 = -\cos \varphi; c_{I2}^1 = \rho \cos \varphi; c_{I2}^2 = \rho \sin \varphi;$$

$$d_{I2}^{13} = -\rho; d_{I1}^{23} = \frac{1}{\rho}.$$

Коэффициенты лопатки, отличные от нуля:

$$x_{II}^1 = \rho \cos \varphi; x_{II}^2 = \rho \sin \varphi; x_{II}^3 = z;$$

$$\frac{\partial x_{II}^3}{\partial q_{II}^1} = 1; \frac{\partial x_{II}^1}{\partial q_{II}^2} = \cos \varphi - \rho \varphi' \sin \varphi; \frac{\partial x_{II}^2}{\partial q_{II}^2} = \sin \varphi + \rho \varphi' \cos \varphi;$$

$$g_{II11} = 1; g_{II22} = 1 + \rho^2 \varphi'^2; n_{II}^1 = -\frac{\sin \varphi + \rho \varphi' \cos \varphi}{\sqrt{1 + \rho^2 \varphi'^2}}; n_{II}^2 = \frac{\cos \varphi - \rho \varphi' \sin \varphi}{\sqrt{1 + \rho^2 \varphi'^2}};$$

$$h_{II22} = \frac{2\varphi' + \rho \varphi'' + \rho^2 \varphi'^3}{\sqrt{1 + \rho^2 \varphi'^2}}; \Gamma_{II22}^2 = \rho \varphi' \frac{\varphi' + \rho \varphi''}{1 + \rho^2 \varphi'^2}; \quad (27)$$

$$c_{II2}^3 = \sqrt{1 + \rho^2 \varphi'^2}; c_{II1}^1 = -\frac{\cos \varphi - \rho \varphi' \sin \varphi}{\sqrt{1 + \rho^2 \varphi'^2}}; c_{II1}^2 = -\frac{\sin \varphi + \rho \varphi' \cos \varphi}{\sqrt{1 + \rho^2 \varphi'^2}};$$

$$d_{II1}^{21} = -\frac{\sin \varphi + \rho \varphi' \cos \varphi}{1 + \rho^2 \varphi'^2}; d_{II1}^{22} = \frac{\cos \varphi - \rho \varphi' \sin \varphi}{1 + \rho^2 \varphi'^2};$$

$$d_{II2}^{11} = \sin \varphi + \rho \varphi' \cos \varphi; d_{II2}^{12} = -\cos \varphi + \rho \varphi' \sin \varphi.$$

Коэффициенты, определяемые движением поверхностей, одинаковы для обеих поверхностей. Отличные от нуля из них:

$$\alpha_1^1 = \alpha_2^2 = \cos \omega t; \alpha_1^2 = -\alpha_2^1 = \sin \omega t; \alpha_3^3 = 1;$$

$$\ddot{\alpha}_1^1 = \ddot{\alpha}_2^2 = -\omega^2 \cos \omega t; \ddot{\alpha}_1^2 = -\ddot{\alpha}_2^1 = -\omega^2 \sin \omega t; \quad (28)$$

$$\omega^3 = \omega; \alpha_0^3 = -1.$$

Коэффициенты  $a_I$  и  $a_{II}$  при одинаковых коэффициентах трения материала по диску и лопатке равны  $f\sqrt{1 + \rho^2 \varphi'^2}$ .

Подставив значения коэффициентов в выражение (23), получим после преобразований уравнение движения материальной точки по линии пересечения диска с лопаткой:

$$\ddot{\rho} = \frac{\omega^2 \rho}{1 + \rho^2 \varphi'^2} - \rho \varphi' \frac{\varphi' + \rho \varphi''}{1 + \rho^2 \varphi'^2} \dot{\rho} - f \left( \frac{2\varphi' + \rho^2 \varphi'^3 + \rho \varphi''}{1 + \rho^2 \varphi'^2} \dot{\rho} + 2\omega \dot{\rho} + \frac{\omega^2 \rho^2 \varphi'}{1 + \rho^2 \varphi'^2} + \frac{g_0}{\sqrt{1 + \rho^2 \varphi'^2}} \right). \quad (29)$$

Если горизонтальная поверхность (диск) неподвижна, а лопатка равномерно вращается вокруг вертикальной оси, то оси абсолютной и относительных систем координат направим также, как и в предыдущем случае. Однако в отличие от предыдущего случая оси координат, жестко связанные с первой поверхностью (диском), будут неподвижны и совпадут с абсолютными. Система координат, жестко связанная со второй поверхностью, будет вращаться относительно первой с частотой  $\omega$ . Линия пересечения поверхностей будет неподвижна относительно второй поверхности (лопатки) и подвижна относительно первой.

Внутренние координаты поверхностей будут те же, что и в предыдущем случае, кроме  $q_1^2 = \varphi + \omega t$ , ибо полярный угол в неподвижной системе больше полярного угла в подвижной на угол поворота  $\omega t$ .

За обобщенную координату примем также  $\rho$ . Тогда частные производные от внутренних координат по обобщенной будут те же, что и для предыдущего случая. Кроме того, отличной от нуля будет частная производная по времени  $\frac{\partial q_1^2}{\partial t} = \omega$

Коэффициенты второй поверхности (лопатки) определяются равенствами (28), коэффициенты первой поверхности (диска) определяются из равенств (27), если в них вместо  $\varphi$  подставить  $\varphi + \omega t$ . Так как первая поверхность неподвижна, а вторая вращается с частотой  $\omega$ , то

$$\begin{aligned} \alpha_{I1}^1 &= \alpha_{I2}^2 = \alpha_{I3}^3 = \alpha_{II3}^3 = 1; \\ \alpha_{II1}^1 &= \alpha_{II2}^2 = \cos \omega t; \quad \alpha_{II1}^2 = -\alpha_{II2}^1 = \sin \omega t; \\ \alpha_{II1}^1 &= \alpha_{II2}^2 = -\omega^2 \cos \omega t; \quad \ddot{\alpha}_{II1}^2 = -\ddot{\alpha}_{II2}^1 = -\omega^2 \sin \omega t; \\ \omega_{II}^3 &= \omega; \quad \alpha_0^3 = -1. \end{aligned} \quad (30)$$

Так как линия пересечения неподвижна относительно второй поверхности (лопатки) и поверхности перпендикулярны вдоль линии пересечения, то

$$\cos \varepsilon_{II} = 1; \quad \cos \varepsilon_I = \frac{(1 + \rho^2 \varphi'^2) \dot{\rho} + \omega \rho^2 \varphi'}{\sqrt{1 + \rho^2 \varphi'^2} \sqrt{(1 + \rho^2 \varphi'^2) \dot{\rho}^2 + 2\omega \rho^2 \varphi' \dot{\rho} + \omega^2 \rho^2}},$$

$$\cos \psi_I = \sin \varepsilon_I = \frac{\omega \rho}{\sqrt{1 + \rho^2 \varphi'^2} \sqrt{(1 + \rho^2 \varphi'^2) \dot{\rho}^2 + 2\omega \rho^2 \varphi' \dot{\rho} + \omega^2 \rho^2}}, \quad (31)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad \cos \psi_{II} = 0.$$

Тогда

$$a_I = f \frac{(1 + \rho^2 \varphi'^2) \dot{\rho} + \omega \rho^2 \varphi'^2 + f \omega \rho}{\sqrt{(1 + \rho^2 \varphi'^2) \dot{\rho}^2 + 2\omega \rho^2 \varphi' \dot{\rho} + \omega^2 \rho^2}},$$

$$a_{II} = f \sqrt{1 + \rho^2 \varphi'^2}. \quad (32)$$

Подставив значения коэффициентов в равенство (23) и проведя преобразования, получим уравнение движения материальной точки по криволинейной лопатке, вращающейся равномерно вокруг вертикальной оси над горизонтальной плоскостью:

$$\ddot{\rho} = \frac{\omega^2 \rho}{1 + \rho^2 \varphi'^2} - \rho \varphi' \frac{\varphi' + \rho \varphi''}{1 + \rho^2 \varphi'^2} \dot{\rho}^2 - f \left[ \frac{2\varphi' + \rho^2 \varphi'^3 + \rho \varphi''}{1 + \rho^2 \varphi'^2} \dot{\rho}^2 + \right.$$

$$\left. + 2\omega \dot{\rho} + \frac{\omega^2 \rho^2 \varphi'}{1 + \rho^2 \varphi'^2} + \frac{(1 + \rho^2 \varphi'^2) \dot{\rho} + \omega \rho^2 \varphi' + f \omega \rho}{\sqrt{(1 + \rho^2 \varphi'^2) \dot{\rho}^2 + 2\omega \rho^2 \varphi' \dot{\rho} + \omega^2 \rho^2}} \frac{g_0}{1 + \rho^2 \varphi'^2} \right]. \quad (33)$$

Формализм составления уравнений (29) и (33) очевиден. Нам не пришлось определять ни сил, ни скоростей, ни ускорений. Были установлены лишь коэффициенты, связанные с геометрией поверхностей и их движением. Эти коэффициенты подставлены в уравнение (23). Еще более упростился и облегчился процесс составления уравнений, если бы существовал каталог коэффициентов плоскости и цилиндра. Составление же каталога коэффициентов наиболее распространенных поверхностей вполне возможно.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сокольников И.С. Тензорный анализ. — М., 1971.
2. Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление. — М., 1969.
3. Сулов Г.К. Теоретическая механика. — М., —Л., 1946.
4. Рапичу к Л.К. Дифференциальные уравнения движения материальной точки по шероховатой поверхности. — В сб.: Пути совершенствования сельскохозяйственной техники. Мн., 1972, вып. 21.
5. Шуликовскый В.И. Классическая дифференциальная геометрия. — М., 1963.