

### К ВОПРОСУ ПРОЕКТИРОВАНИЯ КАРКАСА ОБОЛОЧКИ СО СЛУЧАЙНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ ВЕРШИНАМИ

Известно, что обтекатели больших размеров конструктивно выполняются в виде каркасированных оболочек. Поскольку каркас изготавливается из металла, то существенным для прохождения излучения являются эффекты рассеивания и искажения диаграммы направленности.

Поэтому важным представляется характер распределения элементов каркаса по поверхности обтекателя, так как при случайном равномерном распределении элементов каркаса по поверхности сферы в раскрыве системы результирующий эффект помех, вызываемых металлическим каркасом, пренебрежительно мал [1].

В предлагаемой работе на примере сферической оболочки излагается методика раскрыя поверхности оболочек вращения на треугольные подобласти, вершины которых могут быть приняты за вершины каркаса со случайным равномерным распределением элементов по заданной поверхности.

В первую очередь для решения задачи необходимо получить требуемое распределение случайных величин в заданной области. Существуют различные методы извлечения выборки из заданной плотности распределения [2,3]. Остановимся на методе инверсий, который для двумерной случайной величины можно сформулировать так. Пусть плотность распределения  $f(x_1, x_2)$  – функция двух действительных переменных. Требуется построить последовательность двумерных векторов  $(t_1^{(1)}; t_2^{(1)}; (t_1^{(2)}, t_2^{(2)}; \dots$  такую, что

$$P\{(t_1^{(j)}, t_2^{(j)}) \in B_n\} = \iint_{B_n} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$\text{и } P\{(t_1^{(j_1)}, t_2^{(j_1)}; \dots; (t_1^{(j_N)}, t_2^{(j_N)}) \in B_n\} = [\iint_{B_n} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2]^N.$$

Здесь  $B_n$  – любое множество, такое, что интеграл в правой части существует;  $P\{t \in B_n\}$  – вероятность того, что вектор  $t$  принадлежит  $B_n$ .

Рассмотрим два уравнения:

$$F_1(x_1) = \rho_1; \quad F_2(x_2/x_1) = \rho_2,$$

где  $F_1(x_1)$  – частная функция распределения;  $F_2(x_2/x_1)$  – условная функция распределения;  $\rho_1, \rho_2$  – независимые, равномерно распределенные случайные числа.

## Вводя функции

$$\varphi_1(\rho_1) = \sup x_1; \quad \varphi_2(\rho_2/x_1) = \sup x_2;$$

$$F_1(x_1) < \rho_1; \quad F_2(x_2/x_1) < \rho_2$$

и беря пару равномерно распределенных чисел  $(\rho_1, \rho_2)$ , вычислим  $t_1 = \varphi_1(\rho_1)$ ;  $t_2 = \varphi_2(\rho_2/t_1)$ . Тогда вектор  $(t_1, t_2)$  будет выборочным значением случайной величины с плотностью распределения  $f(x_1, x_2)$ . Пусть, например, необходимо осуществить выборку "точек", равномерно распределенных по части единичной сферы:

$$0 \leq \theta \leq \alpha; \quad 0 \leq \varphi \leq \beta.$$

Здесь  $\theta, \varphi$  — сферические координаты. Тогда в принятой системе координат для дифференциала функции распределения получим

$$dF(\theta, \varphi) = \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{(1 - \cos \alpha)\beta},$$

т.е. плотность распределения будет

$$f(\theta, \varphi) = \begin{cases} \frac{\sin \theta}{(1 - \cos \alpha)\beta} & 0 \leq \theta \leq \alpha; \\ \frac{1}{(1 - \cos \alpha)\beta} & 0 \leq \varphi \leq \beta; \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Выбирая пару случайных чисел  $(\rho_1, \rho_2)$ , равномерно распределенных на отрезке  $[0, 1]$ , получим в соответствии с (1) два уравнения, определяющих точки  $(\theta_i, \varphi_i)$ :

$$F_1(\theta) = \int_0^\theta \int_0^\beta \frac{\sin \theta}{(1 - \cos \alpha)\beta} d\theta d\varphi = \frac{1 - \cos \theta}{1 - \cos \alpha} = \rho_1;$$

$$F_2(\varphi/\theta) = \int_0^\varphi \frac{\sin \theta}{(1 - \cos \alpha)\beta} \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \theta} d\varphi = \frac{\varphi}{\beta} = \rho_2.$$

Откуда

$$\theta_i = \arccos [1 - \rho_1^{(i)} (1 - \cos \alpha)]; \quad \varphi_i = \beta \rho_2^{(i)}. \quad (2)$$

Выборку  $(\theta_i, \varphi_i)$  необходимо получить достаточно представительной с тем, чтобы обеспечить не только хорошее соответствие критерию согласия, но также исходя из конструкции требуемой задачи раскроя поверхности.

Итак, пусть имеется представительная выборка, такая, что при разбиении заданной поверхности на  $n$  непересекающихся подобластей  $S_i$  в каждую из них попало достаточное число точек  $(\theta_{j_i}, \varphi_{j_i})$ .

Следовательно, вся выборка будет разбита на группы. Представителем каждой такой группы выберем точку, координатами которой будут первые моменты

$$m_{x^{r_1} y^{r_2}} = \iint_{S_i} x^{r_1} y^{r_2} f(x, y) dx dy; \quad (r_1 + r_2 = 1). \quad (3)$$

Очевидно, что покрыв равномерно заданную поверхность одинаковыми непересекающимися подобластями и сгруппировав исходную выборку указанным образом, получим выборку точек, также равномерно распределенных по поверхности. Однако по отношению к исходной данная выборка обладает важным свойством:

для каждой точки  $(\theta_{j_i}, \varphi_{j_i})$  можно сразу указать точки, принадлежащие подобластям, о окружающим данную точку, причем этих точек будет всегда фиксированное число, определенное структурой покрытия подобластями  $S_i$ . Это покрытие, например, для полусферы выполним следующим образом. Пометим на ее поверхности меридиональные линии через каждые  $\varphi_n = \frac{2\pi}{n}$  рад. Считая две соседние линии направляющими, проведем через них цилиндрические поверхности; тем самым образуем купол, вписанный в полусферу, причем очевидно, что, выбирая  $n$  достаточно большим, получим сколь угодно близкое приближение к полусфере. Разрезая ку-

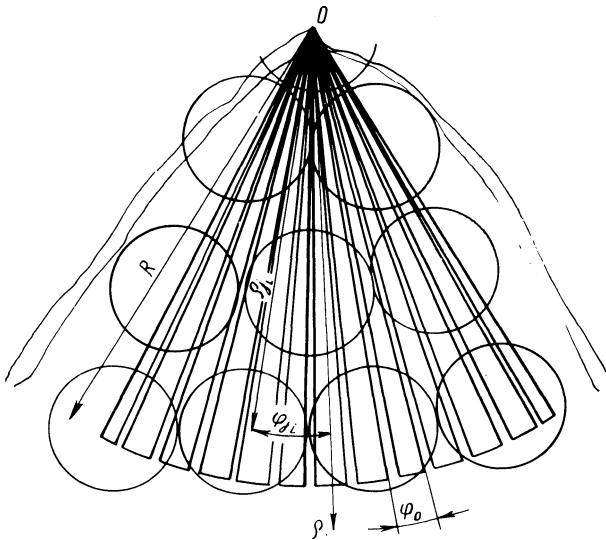


Рис. 1. Лепестковая развертка части сферического купола.

пол по указанным меридиональным линиям, получим развертку купола в виде плоской лепестковой фигуры (рис. 1). Внешний радиус этой фигуры обозначим через  $R$ . Для сферы единичного радиуса и при  $n > N$ , где  $N$ —достаточно большое число, можно принять  $R = \frac{\pi}{2}$ . Сравнивая площади круга радиуса  $R = \frac{\pi}{2}$ , т.е.  $S_R = \frac{1}{4} \pi^3$ , и полусферы единичного радиуса  $S_{п.с}$ , получим, что лепестковая развертка покрывает 81% площади плоского круга. Пустоты — части круга радиуса  $R = \frac{\pi}{2}$ , не покрытые лепестковой разверткой, распределены равномерно по координате  $\varphi$  и неравномерно по координате  $\theta$  сферической оболочки. Если покрыть равномерно развертку малыми кругами, соблюдая требуемую структуру, а затем "склеить" ее в купол, то обнаружим, что круги на экваторе "сожмутся" в широтном направлении, а чем ближе к полюсу  $\theta \rightarrow 0$ , это "сжатие" будет уменьшаться до нуля в зависимости от радиуса кругов покрытия. Следовательно, будет реализовано покрытие неравными подобластями. Для того чтобы области были равновелики, радиусы кругов покрытия на плоскости должны увеличиваться при удалении их от полюса. С учетом отмеченного процента пустот радиусы кругов покрытия в первом приближении будут

$$r_{j_i}^{(k)} = r_+^{(0)} \sqrt{\frac{\sin \rho_{j_i}^{(0)} \rho_{j_i}^{(k-1)}}{\rho_{j_i}^{(\theta)} \sin \rho_{j_i}^{(k-1)}}}. \quad (4)$$

Здесь  $k$  — номер итерации;  $j_i$  — номер круга в  $i$ -м слое (считаем круг в полюсе, принадлежащем нулевому слою);  $r_{j_i}$  — радиус  $j_i$ -го круга;  $\rho_{j_i}$  — расстояние до центра  $j_i$ -го круга;  $\rho_{j_i}^{(0)}$  — расстояние до центра базового круга, базовой площади  $\pi(r_+^0)^2$  (индекс нуль соответствует покрытию плоского круга).

Координаты  $(\rho_{j_i}^{(k)}, \varphi_{j_i}^{(k)})$  вычисляются по формулам:

$$\rho_{j_i}^{(k)} = r_{j_i}^{(k)} \sqrt{3i^2 + j_i^2}; \quad \varphi_{j_i} = \arctg \frac{j_i}{i\sqrt{3}}.$$

Относительно индекса  $j_i$  следует сделать замечание: номер круга со знаком в  $i$ -м слое отсчитываем от оси симметрии области (против часовой стрелки берем с полюсом). В нечетном слое номера — нечетные  $\pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots$ . В четном — четные  $0, \pm 2, \pm 4 \dots$

Таблица 1

i	0	1	2		3	
j	0	±1	0	±2	±1	±3
$\rho_j^{(0)}$	0	0,2244	0,3887	0,0488	0,5937	0,6773
$\varphi_{j_i}^{(0)}$	полюс	±0,5236	0	±0,5736	±0,1911	±0,5236
$r_{j_i}^1$	0,0899	0,0899	0,0907	0,0910	0,0922	0,0931
$\rho_{j_i}^{(1)}$	0	0,1798	0,3140	0,3642	0,4880	0,5584
$\theta_i$	0,2	0,2213	0,3784	0,4569	0,5084	0,6568
$\varphi_i$		0,2070		0,4741	0,5997	0,6497
		+0,6283	0,0345	0,4712	0,4014	0,5934
		-0,4364		-0,5759	-0,4221	-0,4363
$\rho_j^{(0)}$	1,1660	1,1874	1,2454	1,3463	1,3650	1,4013
$\varphi_{j_i}^{(0)}$	0	±0,1901	±0,3674	±0,5236	±0,080	±0,2430
$r_{j_i}^{(1)}$	0,1008	0,1012	0,1027	0,1052	0,1057	0,1067
$\rho_{j_i}^{(1)}$	1,0478	1,0720	1,1439	1,2624	1,2860	1,3332
$\theta_i$	1,2352	1,1281	1,1995	1,3352	1,3923	1,3566
		1,1852	1,2280	1,3566	1,3851	1,4351
$\varphi_i$	0	0,1919	0,3316	0,4363	0,0872	0,4014
		0,1919	0,3665	0,5759	0,0872	0,2094

Применение методики рассмотрим на примере. Положим в (2)  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{3}$ , т.е. ограничимся третьей частью полусферы. Используя формулы (4) и (5), покроем исходную область равномерно распределенными непересекающимися областями равной площади. Лепестковая развертка в этом случае будет покрыта кругами, радиус которых увеличивается с удалением от полюса (рис. 1). Используя таблицу равномерно распределенных случайных чисел, например [4], по формулам (2) получим выборку  $(\theta_i, \varphi_i)$ . Вычисляем для каждой подобласти  $S_j$  моменты по формулам (4) и принимаем их за координаты вершин каркаса. Соединяя каждую вершину с вершинами в областях, примыкаемых к рассматриваемой,

4			5		
0	+2	±4	±1	±3	±5
0,0777	0,8091	0,8996	0,9781	1,0283	1,1220
0	±0,2810	±0,5236	±0,1150	±0,3334	±0,5236
0,0942	0,0946	0,0959	0,0972	0,0981	0,0999
0,6526	0,6826	0,7880	0,8474	0,8991	0,999
0,7497	0,8211	0,8567	0,9996	0,9924	1,0781
	0,8282	0,8282	0,9496	1,0781	1,0924
0,0349	0,2967	0,5934	0,1221	0,2967	0,4886
	-0,2792	-0,4263	-0,1221	-0,3491	-0,5585
1,4715	1,5708	1,5567	1,5708	1,6182	1,6942
±0,3511	±0,5236	0	±0,1433	±0,2810	±0,4086
0,1089	0,1122	0,1116	0,1122	0,1139	
1,4277	1,5708	1,5468	1,5708	1,6430	
1,4922	1,5208	1,5779	1,5779		
1,4351	1,5065		1,5708		
0,3665	0,541	0,0174	0,1221		
0	0,4537		0,1396		

мой, получим нерегулярную решетку из случайных элементов, равномерно распределенных по заданной области.

Результаты расчета приведены в табл. 1. Здесь принято

$$i = 7; j_+ = 0; r_+^0 = 0,1122.$$

На рис. 2 изображена полученная часть каркаса.

Область сферы, из которой производится выборка, может быть вся поверхность оболочки. Однако в этом нет не только необходимости, но и целесообразности. В зависимости от раскрытия антенны и требований стандартизации и унификации элементов эта область может быть частью поверхности оболочек, которую впредь будем называть модулем. Если на модуле каркас "органи-

зован”, то каркас на всей оболочке может быть получен ”отражением” модуля на остальную поверхность оболочки. Так, в рассматриваемом случае модуль представляет собой треть полусферы.

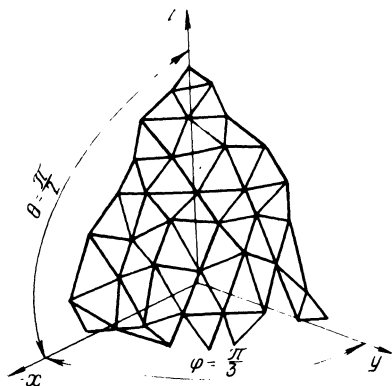


Рис. 2. Схема части каркаса с равномерным случайным размещением вершин.

Тогда, полагая координаты  $(\theta_i; \varphi_i + \frac{\pi}{3})$  и  $(\theta_i; \varphi_i + \frac{2}{3}\pi)$ , получим координаты вершин в остальных двух третях.

Для отражения на нижнюю полусферу надо положить координаты:  $(\pi - \theta_i, \varphi_i)$ ;  $(\pi - \theta_i, \varphi_i + \frac{\pi}{3})$ ;  $(\pi - \theta_i, \varphi_i + \frac{2}{3}\pi)$ . Совершенно аналогично могут быть ”раскроены” и другие оболочки вращения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сканирующие антенные системы СВЧ /Под ред. Г.Т.Маркова, А.Ф. Чаплина. — М., 1966.
2. Кендал А.Ж., Стьюарт А. Теория распределений. — М., 1966.
3. Спанье Д.Ж., Гелбард Э. Метод Монте-Карло в задаче переноса нейтронов. — М., 1971.
4. Кадыров М. Таблицы случайных чисел. — Ташкент, 1936.

УДК 621.85.01

О.С.Баршай

#### К ВЫВОДУ УРАВНЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ РАСТЯЖИМОЙ НИТИ ПО ШКИВУ\*

Рассматривается нестационарное движение гибкой растяжимой нити, взаимодействующей со шкивом, периферия которого обладает сдвиговыми свойствами. Дан вывод уравнения, приве-

\* Выполнена под руководством канд.техн.наук М.А.Левина.