Можно показать, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} d_{m,n} < 2\ln\left|\frac{2n+3}{2n-1}\right| ;$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n^i = 0.$$

Поэтому систему (5) можно решать методом усечения. Коэффициенты концентрации напряжений [2] у вершины разреза определяются выражениями

$$\kappa_1 = \lim_{x\to 1} \sigma(x)\sqrt{x-1} = \sqrt{\frac{\beta}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} A^1_{2m+1} ;$$

$$\kappa_2 = \lim_{x\to 1} \tau(x)\sqrt{x-1} = \sqrt{\frac{d}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} A^2_{2m+1} .$$

На рис. 2 приведены эпюры $\sigma(x)$ и $\tau(x)$ при $a = 0{,}5$ и $2\alpha = \frac{\pi}{2}$. Предполагаемую методику расчета можно обобщить на случай действия нормальных сил, приложенных к разрезу и распределенных по любому закону.

Также очевидно, что напряженное состояние клина определяется внешней нагрузкой, приложенной к разрезу и найденными законами распределения напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. — М.-Л., 1967. 2. Развитие теории контактных задач в СССР /Под ред. Л.А.Галина. — М., 1976. 3. Попов Г.Я. О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости. — ПММ, 1969, 33, № 3.

УДК 539.3.01

Н.Н.Флусов

К ВОПРОСУ О ПРИМЕНЕНИИ R-ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Задача трехмерной теории упругости в перемещениях сводится к отысканию бигармонических функций, т.е. удовлетворяющих уравнению

$$\Delta^2 u_i = 0; \quad i = 1, 2, 3 \tag{1}$$

внутри рассматриваемой области, а также некоторым граничным условиям

$$L(\bar{u}) / \Gamma = \bar{\varphi} \ , \qquad (2)$$

где L – соответствующий оператор, определенный на границе области Γ .

Рассмотрим построение структур [1,2] для задач следующего класса. Пусть Ω — цилиндрическая область с уравнением боковой поверхности $\omega_1(x,y)$, нормализованным до первого порядка, и ограниченная плоскостями $z = 0$, $z = h$, объединенными в границу

$$\omega_2 = z(h-z)/h. \qquad (3)$$

На боковой поверхности заданы произвольные самоуравновешенные нормальные и касательные нагрузки как функции от x, y, z.

Граничные условия на поверхности $\omega_1 = 0$ имеют вид

$$\sigma_n = L_n(\bar{u}) = A_{11}\frac{\partial u_1}{\partial n} + B_{11}\frac{\partial u_1}{\partial \tau} + A_{12}\frac{\partial u_2}{\partial n} + B_{12}\frac{\partial u_2}{\partial \tau} + l_1\frac{\partial u_3}{\partial z}\Big|_{\omega_1} = \varphi_1;$$

$$\tau_n = L_\tau^{(1,2)}(u) = A_{21}\frac{\partial u_1}{\partial n} + B_{21}\frac{\partial u_1}{\partial \tau} + A_{22}\frac{\partial u_2}{\partial n} + B_{22}\frac{\partial u_2}{\partial \tau}\Big|_{\omega_1} = \varphi_2; \qquad (4)$$

$$\tau_3 = L_\tau^{(3)}(\bar{u}) = A_{31}\frac{\partial u_1}{\partial z} + B_{31}\frac{\partial u_2}{\partial z} + C_2\frac{\partial u_3}{\partial n}\Big|_{\omega_1} = \varphi_3 .$$

Здесь

$$A_{11} = (\lambda + 2\mu)n_x;$$

$$B_{11} = -[\lambda + 2\mu - 4\mu(n_x)^2]n_y;$$

$$A_{12} = (\lambda + 2\mu)n_y;$$

$$B_{12} = [\lambda + 2\mu - 4\mu(n_y)^2]n_x; \qquad (5)$$

$$C_1 = \lambda;$$

$$A_{21} = -B_{22} = \mu n_y;$$

$$B_{21} = A_{22} = -\mu n_x;$$

$$A_{31} = \mu n_x;$$

$$B_{31} = \mu n_y.$$

$$C_2 = \mu \ ,$$

где n_x, n_y – направляющие косинусы к контуру в плоскости z = = const; $\frac{\partial n_i}{\partial n}$, $\frac{\partial n_i}{\partial \tau}$ — производные по нормали и касательной соответственно к тому же контуру; σ_n, τ_n, τ_3 – составляющие внешней нагрузки по соответствующим осям (рис. 1).

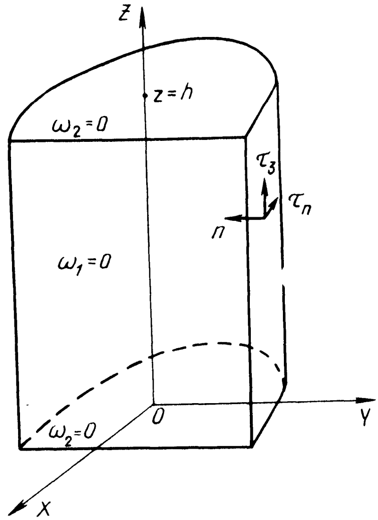

Рис. 1.

На поверхности $\omega_2 = 0$ граничные условия представлены следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= L_n(\bar{u}) = D_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + D_1\frac{\partial u_2}{\partial y} + E_1\frac{\partial u_3}{\partial n}\Big|_{\omega_2} = 0; \\
\tau_1 &= L_\tau^{(1)}(u) = D_2\frac{\partial u_1}{\partial n} + E_2\frac{\partial u_3}{\partial x}\Big|_{\omega_2} = 0; \\
\tau_2 &= L_\tau^{(2)}(\bar{u}) = D_2\frac{\partial u_2}{\partial n} + E_2\frac{\partial u_3}{\partial y}\Big|_{\omega_2} = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}
D_1 &= \lambda n_z; \\
D_2 &= \mu; \\
E_1 &= \lambda + 2\mu; \\
E_2 &= \mu n_z,
\end{aligned} \tag{7}$$

где τ_1, τ_2 – проекции внешней нагрузки на оси x и y соответственно.

Продолжая граничные операторы внутрь области, получим:
от поверхности $\omega_1(x, y)$

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial\omega_1}{\partial x}D_1^{(1)}(u_1)-\frac{\partial\omega_1}{\partial y}\left[\lambda+2\mu-4\mu\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\right)^2\right]T_1^{(1)}(u_1)+$$

$$+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\omega_1}{\partial y}D_1^{(1)}(u_2)+\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\left[\lambda+2\mu-4\mu\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial y}\right)^2\right]T_1^{(1)}(u_2)+$$

$$+\lambda\frac{\partial u_3}{\partial z}=\varphi_1^*+\omega_1F_1; \tag{8}$$

$$-\mu\frac{\partial\omega_1}{\partial x}T_1^{(1)}(u_1)+\mu\frac{\partial\omega_1}{\partial y}D_1^{(1)}(u_1)-\mu\frac{\partial\omega_1}{\partial x}D_1^{(1)}(u_2)-$$

$$-\mu\frac{\partial\omega_1}{\partial y}T_1^{(1)}(u_2)=\varphi_2^*+\omega_1F_2;$$

$$\mu\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\frac{\partial u_1}{\partial z}+\mu\frac{\partial\omega_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial z}+\mu D_1^{(1)}(u_3)=\varphi_3^*+\omega_1F_3,$$

где φ_i^* – функции, удовлетворяющие условию

$$\varphi_i^*|_{\omega_1}=\varphi_i; \tag{9}$$

от поверхности $\omega_2(z)$

$$\lambda\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\left\{\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\left[D_1^{(1)}(u_1)+D_1^{(1)}(u_2)\right]+\frac{\partial\omega_1}{\partial y}\left[T_1^{(1)}(u_2)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-T_1^{(1)}(u_1)\right]\right\}+(\lambda+2\mu)D_1^{(2)}(u_3)=\omega_2F_4; \tag{10}$$

$$\mu\left\{D_1^{(2)}(u_1)+\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\left[\frac{\partial\omega_1}{\partial x}D_1^{(1)}(u_3)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial\omega_1}{\partial y}T_1^{(1)}(u_3)\right]\right\}=\omega_2F_5;$$

$$\mu\left\{D_1^{(2)}(u_2)+\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\left[\frac{\partial\omega_1}{\partial x}T_1^{(1)}(u_3)+\frac{\partial\omega_1}{\partial y}D_1^{(1)}(u_3)\right]\right\}=$$

$$=\omega_2F_6.$$

Представим перемещения в виде

$$u_i = \Phi_i^{(1)} + \omega_0 \Phi_i^{(2)}, \tag{11}$$

где

$$\omega_0 = \omega_1 \ \lambda_\alpha \omega_2 . \tag{12}$$

Подставляя (11) в (8) и преобразуя получившиеся выражения, имеем

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \Phi_1^{(2)} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \Phi_2^{(2)} +$$

$$+ \lambda \frac{\partial \omega_0}{\partial z} \Phi_3^{(2)} = \theta_1 + \omega_1 F_1^{(1)} ; \tag{13}$$

$$\mu \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \Phi_1^{(2)} - \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \Phi_2^{(2)} = \theta_2 + \omega_2 F_2^{(1)} ;$$

$$\mu \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \frac{\partial \omega_0}{\partial z} \Phi_1^{(2)} + \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \frac{\partial \omega_0}{\partial z} \Phi_2^{(2)} + \mu \Phi_3^{(2)} = \theta_3 + \omega_1 F_3^{(1)} .$$

Здесь $\theta_1 = \varphi_1^* - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \omega_1}{\partial x} D_1^{(1)} (\Phi_1^{(1)}) + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} [\lambda + 2\mu -$

$$- 4\mu \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x}\right)^2] T_1^{(1)} (\Phi_1^{(1)}) - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \omega_1}{\partial y} D_1^{(1)} (\Phi_2^{(1)}) -$$

$$- \frac{\partial \omega_1}{\partial x} [\lambda + 2\mu - 4\mu \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y}\right)^2] T_1^{(1)} (\Phi_2^{(1)}) - \lambda \frac{\partial \Phi_3^{(1)}}{\partial z} ; \tag{14}$$

$$\theta_2 = \varphi_2^* - \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial y} D_1^{(1)} (\Phi_1^{(1)}) + \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial x} T_1^{(1)} (\Phi_1^{(1)}) +$$

$$+ \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial x} D_1^{(1)} (\Phi_2^{(1)}) + \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial y} T_1^{(1)} (\Phi_2^{(1)}) ;$$

$$\theta_3 = \varphi_3^* - \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial z} - \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2^{(1)}}{\partial z} - \mu D_1^{(1)} (\Phi_3^{(1)}) ,$$

где $F_i^{(1)}$ — сумма соответствующих функций, имеющих множитель ω_1.

Решение системы (13) имеет вид

$$\Phi_1^{(2)} = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \theta_1 + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \theta_2 + \omega_1 \varphi_1 ;$$

$$\Phi_2^{(2)} = \frac{1}{\lambda+2\mu}\,\frac{\partial\omega_1}{\partial y}\,\theta_1 - \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\,\theta_2 + \omega_2\varphi_2; \qquad (15)$$

$$\Phi_3^{(2)} = \frac{1}{\mu}\,\theta_3 + \omega_1\varphi_3 .$$

где φ_i – произвольные функции.

Подставляя (15) в (11), получим структуру, учитывающую граничные условия на поверхности $\omega_1(x,y)$:

$$u_1 = \Phi_1^{(1)} + \omega_0\left\{\frac{1}{\lambda+2\mu}\,\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\,\theta_1 + \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial\omega_1}{\partial y}\,\theta_2 + \omega_1\varphi_1\right\};$$

$$u_2 = \Phi_2^{(1)} + \omega_0\left\{\frac{1}{\lambda+2\mu}\,\frac{\partial\omega_1}{\partial y}\,\theta_1 - \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\,\theta_2 + \omega_1\varphi_2\right\};$$

$$u_3 = \Phi_3^{(1)} + \omega_0\left\{\frac{1}{\mu}\,\theta_3 + \omega_1\varphi_3\right\}. \qquad (16)$$

Для того чтобы учесть граничные условия на поверхности $\omega_2 =$ $= 0$, положим

$$\Phi_i^{(1)} = \psi_i^{(1)} + \omega_2\psi_i^{(2)} . \qquad (17)$$

Подставляя (17) в (10), учитывая (11) и (16) и преобразуя получившиеся выражения, находим

$$-(\lambda+2\mu)\,\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\,\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\,\psi_1^{(2)} - (\lambda+2\mu)\,\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\,\frac{\partial\omega_1}{\partial y}\,\psi_2^{(2)} +$$

$$+ \left[\lambda+2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\right)^2\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\left[\frac{\partial\omega_1}{\partial x} + \frac{\partial\omega_1}{\partial y}\right]\psi_3^{(2)}\right. =$$

$$= \chi_1 + \omega_1 q_1^{(1)} + \omega_2 q_2^{(1)};$$

$$\mu\left[1 - \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\right)^2\right]\psi_1^{(2)} - \mu\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\right)^2\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\,\frac{\partial\omega_1}{\partial y}\,\psi_2^{(2)} -$$

$$-\frac{\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\,\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\,\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\,\psi_3^{(2)} = \chi_2 + \omega_1 q_1^{(2)} + \omega_2 q_2^{(2)}; \qquad (18)$$

$$-\mu\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\right)^2\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\,\frac{\partial\omega_1}{\partial y}\,\psi_1^{(2)} + \mu\left[1 - \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial y}\right)^2\right]\psi_2^{(2)}$$

$$-\frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\,\frac{\partial\omega_1}{\partial y}\,\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\,\psi_3^{(2)} = \chi_3 + \omega_1 q_1^{(3)} + \omega_2 q_2^{(3)},$$

где

$$\varkappa_1 = -\Big\{(\lambda+2\mu)\,[D_1^{(2)}(\varphi_3^{(1)}) + \Phi_{31}^{(2)}] + \lambda\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\ \times$$

$$\times\ [\frac{\partial\omega_1}{\partial x}(D_1^{(1)}(\varphi_1^{(1)}) + D_1^{(1)}(\varphi_2^{(1)}) + \Phi_{11}^{(2)} + \Phi_{21}^{(2)}) + \frac{\partial\omega_1}{\partial y}]\ \times$$

$$\times\ [T_1^{(1)}(\varphi_2^{(1)}) - T_1^{(1)}(\varphi_1^{(1)})]\Big\}\ ;$$

$$\varkappa_2 = -\mu\Big\{D_1^{(2)}(\varphi_1^{(1)}) + \Phi_{11}^{(2)} + \frac{\partial\omega_2}{\partial z}\,[\frac{\partial\omega_1}{\partial x}D_1^{(1)}(\varphi_3^{(1)}) +$$

$$+\ \Phi_{31}^{(2)} - \frac{\partial\omega_1}{\partial y}T_1^{(1)}(\Phi_3^{(1)})]\Big\}\ ; \qquad (19)$$

$$\varkappa_3 = -\mu\Big\{D_1^{(2)}(\varphi_2^{(1)}) + \varphi_{21}^{(2)} + \frac{\partial\omega_2}{\partial z}\,[\frac{\partial\omega_1}{\partial x}T_1^{(1)}(\varphi_3^{(1)}) +$$

$$+\ \frac{\partial\omega_1}{\theta\, y}(D_1^{(1)}(\varphi_3^{(1)}) + \Phi_{31}^{(2)})]\Big\};$$

$$\Phi_{11}^{(2)} = \frac{1}{\lambda+2\mu}\,\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\Big\{\varphi_1^{*} - (\lambda+2\mu)\,\frac{\partial\omega_1}{\partial x}D_1^{(1)}(\psi_1^{(1)}) +$$

$$+\ \frac{\partial\omega_1}{\partial y}\,[\lambda+2\mu-4\mu(\frac{\partial\omega_1}{\partial x})^2]\,T_1^{(1)}(\varphi_1^{(1)}) - (\lambda+2\mu)\ \times$$

$$\times\ \frac{\partial\omega_1}{\partial y}D_1^{(1)}(\varphi_2^{(1)}) - \frac{\partial\omega_1}{\partial x}\,[\lambda+2\mu-4\mu(\frac{\partial\omega_1}{\partial v})^2 T_1^{(1)}(\varphi_2^{(1)}) -$$

$$-\ \frac{\partial\varphi_3^{(1)}}{\partial z}\Big\} + \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial\omega_1}{\partial y}\Big\{\varphi_2^{*} - \mu\frac{\partial\omega_1}{\partial y}D_1^{(1)}(\varphi_1^{(1)}) + \mu\frac{\partial\omega_1}{\partial x}T_1^{(1)}(\varphi_1^{(1)}) +$$

$$+\mu\frac{\partial\omega_1}{\partial x}D_1^{(1)}(\varphi_2^{(1)}) + \mu\frac{\partial\omega_1}{\partial y}T^{(1)}(\varphi_2^{(1)})\Big\}\ ; \qquad (20)$$

$$\Phi_{21}^{(2)} = -\frac{1}{\lambda+2\mu}\,\frac{\partial\omega_1}{\partial y}\Big\{\varphi_1^{*} - (\lambda+2\mu)\,\frac{\partial\omega_1}{\partial x}D_1^{(1)}(\varphi_1^{(1)}) + \frac{\partial\omega_1}{\partial y}[\lambda+$$

$$+\ 2\mu-4\mu(\frac{\partial\omega_1}{\partial x})^2]\,T_1^{(1)}(\varphi_1^{(1)}) - (\lambda+2\mu)\,\frac{\partial\omega_1}{\partial y}D_1^{(1)}(\varphi_2^{(1)}) -$$

$$-\ \frac{\partial\omega_1}{\partial x}[\lambda+2\mu-4\mu(\frac{\partial\omega_1}{\partial y})^2]\,T_1^{(1)}(\varphi_2^{(1)}) - \lambda\frac{\partial\omega_3^{(1)}}{\partial z}\Big\} -$$

$$- \frac{1}{\mu}\frac{\partial \omega_1}{\partial x}\Big\{ \varphi_2^* - \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial y} D_1^{(1)}(\varphi_1^{(1)}) + \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial x} T_1^{(1)}(\varphi_1^{(1)}) +$$

$$+ \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial x} D_1^{(1)}(\varphi_2^{(1)}) + \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial y} T_1^{(1)}(\varphi_2^{(1)}) \Big\};$$

$$\varphi_{31}^{(2)} = \frac{1}{\mu}\Big\{ \varphi_3^* - \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial z} - \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial z} - \mu D_1^{(1)}(\varphi_3^{(1)}) \Big\},$$

где $q_i^{(j)}$ — произвольные функции.

Таким образом, решение системы (18) имеет вид

$$\varphi_1^{(2)} = - \frac{1}{\lambda+2\mu}\frac{\partial \omega_2}{\partial z}\frac{\partial \omega_1}{\partial x} x_1 + \frac{1}{\mu\lambda}\Big\{ \Big(\frac{\partial \omega_1}{\partial y}\Big)^2 - \Big[1 - \Big(\frac{\partial \omega_1}{\partial y}\Big)^2\Big] \times \Big[\lambda + 2\mu -$$

$$- \frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\frac{\partial \omega_1}{\partial x}\Big[\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y}\Big]\Big]\Big\} x_2 - \frac{1}{\mu\lambda}\frac{\partial \omega_1}{\partial x}\frac{\partial \omega_1}{\partial y}\Big\{\Big[2(\lambda+\mu) -$$

$$- \frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\frac{\partial \omega_1}{\partial x}\Big[\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y}\Big]\Big]\Big\} x_3 + \omega_1 \varphi_1^{(1)} + \omega_2 \varphi_2^{(1)}; \qquad (21)$$

$$\varphi_2^{(2)} = - \frac{1}{\lambda+2\mu}\frac{\partial \omega_2}{\partial z}\frac{\partial \omega_1}{\partial y} x_1 - \frac{1}{\mu\lambda}\Big\{ 2(\lambda+\mu) - \frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \times$$

$$\times \Big[\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y}\Big]\Big\}\frac{\partial \omega_1}{\partial x}\frac{\partial \omega_1}{\partial y} x_2 + \frac{1}{\mu\lambda}\Big\{\lambda\Big(\frac{\partial \omega_1}{\partial x}\Big)^2 - \Big[1 -$$

$$- \Big(\frac{\partial \omega_1}{\partial x}\Big)^2\Big]\Big[\lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\frac{\partial \omega_1}{\partial x}\Big[\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y}\Big]\Big]\Big\} x_3 +$$

$$+ \omega_1 \varphi_1^2 + \omega_2 + \varphi_2^{(2)};$$

$$\varphi_3^{(2)} = - \frac{(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\frac{\partial \omega_2}{\partial z}\frac{\partial \omega_1}{\partial x} x_2 - \frac{(\lambda+2\mu)}{\lambda\mu}\frac{\partial \omega_2}{\partial z}\frac{\partial \omega_1}{\partial y} x_3 +$$

$$+ \omega_1 \varphi_1^3 + \omega_2 \varphi_2^{(3)}.$$

Подставляя найденные выражения (21) в (17), а затем в (16), получим структуру, учитывающую граничные условия на обеих поверхностях:

$$u_i = \varphi_i^{(1)} + \omega_2 \varphi_i^{(2)} + \omega_0 \Phi_{i0}^{(2)}, \qquad (22)$$

где $\Phi^{(2)}_{i0} = \Phi^{(2)}_{i} (\varphi^{(1)}_{1}, \varphi^{(1)}_{2}, \varphi^{(1)}_{3})$.

Таким образом, каждое перемещение u_i зависит от трех общих произвольных функций и четырех независимых функций, которые выбираются так, чтобы было удовлетворено уравнение (1).

Пример. Выпишем структуру для следующей задачи. Пусть имеется цилиндр радиуса R и высоты h. На боковой поверхности задано только нормальное сжимающее усилие интенсивности $(\lambda + 2\mu) P$; торцы свободны от нагрузок.

Тогда

$$\omega_1 = \frac{1}{2R} (R^2 - x^2 - y^2). \tag{23}$$

Структура указанной задачи имеет вид:

$$\begin{aligned}
u_1 = {} & \varphi^{(1)}_1 + \omega_2 \Big\{ K_1(x) \chi_1 + K_2(y) \chi_2 + K_3(x,y) \chi_3 + \omega_1 \varphi^{(1)}_1 + \\
& + \omega_2 \varphi^{(1)}_2 \Big\} + \omega_0 \Big\{ \Phi^{(2)}_{11} + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \frac{x}{R} \frac{h-2z}{h} \psi^{(1)}_3 + \omega_1 \varphi^{(1)}_3 + \\
& + \omega_2 \varphi^{(1)}_4 \Big\}; \qquad (24) \\
u_2 = {} & \varphi^{(1)}_2 + \omega_2 \Big\{ K_1(y) \chi_1 + K_3(x,y) \chi_2 + K_2(x) \chi_3 + \omega_1 \varphi^{(2)}_1 + \\
& + \omega_2 \varphi^{(2)}_2 \Big\} + \omega_0 \Big\{ \Phi^{(2)}_{21} + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \frac{y}{R} \frac{h-2z}{h} \psi^{(1)}_3 + \omega_1 \varphi^{(2)}_3 + \\
& + \omega_2 \varphi^{(2)}_4 \Big\}; \\
u_3 = {} & \varphi^{(1)}_3 + \omega_2 \Big\{ \frac{(\lambda+2\mu)^2}{\lambda\mu} [K_1(x) \chi_2 + K_1(y) \chi_3] + \omega_1 \varphi^{(3)}_1 + \\
& + \omega_2 \varphi^{(3)}_2 \Big\} + \omega_0 \Big\{ \Phi^{(2)}_{31} + \frac{h-2z}{hR} (x \psi^{(1)}_1 + y \psi^{(1)}_2) + \omega_1 \varphi^{(3)}_3 + \\
& + \omega_2 \varphi^{(3)}_4 \Big\},
\end{aligned}$$

где

$$K_1(t) = \frac{1}{\lambda+2\mu} \frac{h-2t}{h} \frac{t}{R};$$

$$K_2(t) = \frac{1}{\lambda\mu} [\lambda \frac{t^2}{R^2} - [1 - \frac{t^2}{R^2}] (\lambda+2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu} \frac{x(x+y)}{R^2})];$$

$$K_3(x,y) = -\frac{1}{\lambda\mu}\frac{xy}{R^2}\left[2(\lambda+\mu) - \frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\frac{x(x+y)}{R^2}\right];$$

$$\chi_1 = -\Big\{(\lambda+2\mu)\Big[D_1^{(2)}(\varphi_3^{(1)}) + \frac{1}{R}\Big(x\frac{\partial\varphi_1^{(1)}}{\partial z} + y\frac{\partial\varphi_1^{(1)}}{\partial z}\Big) -$$

$$- D_1^{(1)}(\varphi_2^{(1)})\Big] + \lambda\frac{h-2z}{hR^2}\Big[-x(x+y)p - x(x+y)\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial z} +$$

$$+ N_1(y,x)T_1^{(1)}(\varphi_1^{(1)}) + N_1(-y,y)T_1^{(1)}(\varphi_2^{(1)})\Big]\Big\};$$

$$\chi_2 = -\mu\Big\{D_1^{(2)}(\varphi_1^{(1)}) + \frac{x}{R}p + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{\partial\varphi_3^{(1)}}{\partial z}\frac{x}{R} - D_1^{(1)}(\varphi_1^{(1)}) +$$

$$+ N_2(x,y)T_1^{(1)}(\varphi_1^{(1)}) - N_3(x,y)T_1^{(1)}(\varphi_2^{(1)}) + \frac{h-2z}{hR}\times$$

$$\times\Big[yT_1^{(1)}(\varphi_3^{(1)}) - \frac{x}{R}\Big(x\frac{\partial\varphi_1^{(1)}}{\partial z} + y\frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial z}\Big)\Big]\Big\};$$

$$\chi_3 = -\mu\Big\{D_1^{(2)}(\varphi_2^{(1)}) + \frac{y}{R}p + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{\partial\varphi_3^{(1)}}{\partial z}\frac{y}{R} - D_1^{(1)}(\varphi_2^{(1)}) +$$

$$+ N_3(y.x)T_1^{(1)}(\varphi_1^{(1)} - N_2(y,x)T_1^{(1)}(\varphi_2^{(1)}) - \frac{h-2z}{hR}$$

$$\Big[xT_1^{(1)}(\varphi_3^{(1)}) + \frac{y}{R}\Big(x\frac{\partial\varphi_1^{(1)}}{\partial z} + y\frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial z}\Big)\Big]\Big\};$$

$$N_1(\alpha,\beta) = -\frac{1}{R}\Big[x(y^2 - x^2 + 2x\alpha - \frac{4\mu}{\lambda+2\mu}\frac{(x+y)xy\beta}{R^2}) - \alpha\Big];$$

$$N_2(\alpha,\beta) = 2\alpha\beta - \frac{4\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\alpha^3\beta}{R^2};$$

$$N_3(\alpha,\beta) = \alpha^2 - \beta^2\Big(\frac{\alpha^2}{R^2}\frac{4\mu}{\lambda+2\mu} + 1\Big).$$

Таким образом, получена структура, описывающая довольно широкий класс задач для цилиндрического тела со свободными от нагрузок торцами и произвольной системой самоуравновешенных нагрузок, приложенных к боковой поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р в а ч е в В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. — Киев, 1967. 2. Р в а ч е в В.Л., С л е с а р е н к о А.П. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. — Киев, 1976.

УДК 532.135.001.5

А.Х.Ким, А.А.Ким

ДИССИПАЦИЯ ЭНЕРГИИ ПРИ ВИСКОЗИМЕТРИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ НЕНЬЮТОНОВСКИХ СИСТЕМ

Обычно при реологических измерениях с помощью ротационных приборов полагают, что в процессе эксперимента реологические параметры не изменяются. Однако при больших скоростях деформации или при большой продолжительности опытов повышение температуры в системе может повлиять на результаты измерений. Как указано в [1], процесс может считаться изотермическим, если разность температур в начале и конце опыта не превышает 5—6°.

Применяемые в приборах разные системы термостатирования имеют целью поддержание постоянной температуры во внешней среде, но это не исключает локальное повышение температуры внутри системы.

Практически обработка экспериментальных данных, получаемых при переменной температуре в пределах одного опыта с учетом температурного фактора, не представляется возможной, так как зависимость искомых реологических параметров от температуры заранее не известна.

Методы определения температурной зависимости реологических параметров известны, но принимаемое на практике условие равенства температуры опыта и температуры окружающей среды или теплоносителя термостата требует уточнения.

Рассмотрим тепловой процесс в системе, подчиняющейся уравнению реологического состояния среды:

$$\tau = \tau_0 + \beta (\dot{\gamma})^n \tag{1}$$

при вискозиметрическом течении между двумя коаксиальными цилиндрами и скорости сдвига $|\dot{\gamma}| > 1$.

Уравнение энергии в общем виде