$$8.\quad (-1)^{\kappa-1}\sum_{m=1}^{11}\left[C_{m+1}^{m-\kappa}R^{2(m-\kappa)}\frac{W_{2m,0}^{11}}{2m+1}-2mC_{m}^{m-\kappa-1}R^{2(m-\kappa-1)}\times\right.$$

$$\left.\times W_{2m,0}\right]+\frac{1}{2\kappa+1}W_{0,2\kappa}^{11}-2(\kappa+1)W_{0,2\kappa+2}+$$

$$+\sum_{m=1}^{m+n=7}\sum_{n=1}(-1)^{n+1}\left\{\frac{a^4}{8}\left(\frac{b^2}{4}-R^2\right)\left[(m+n)\left(\frac{b^2}{4}-R^2\right)-2R^2\right]C_m^{\kappa-n+1}+\right.$$

$$+R^2\left[(m+n+1)\left(\frac{b^2}{4}-R^2\right)(a^2-b^2+4R^2)-a^2R^2+8R^2\left(\frac{b^2}{4}-R^2\right)\right]\frac{a^2}{4}C_{m+1}^{\kappa-n+1}+$$

$$+R^4\left[(m+n+2)\left(\frac{a^4+b^4}{8}+2R^4-b^2R^2+2a^2R^2-\frac{a^2b^2}{2}\right)-4R^2\left(\frac{b^2}{4}-R^2\right)+\right.$$

$$\left.+2a^2R^2\right]C_{m+2}^{\kappa-n+1}+R^6\left[(m+n+3)(b^2-a^2-4R^2)-4R^2\right]C_{m+3}^{\kappa-n+1}+$$

$$\left.+2R^8(m+n+4)C_{m+4}^{\kappa-n+1}\right\}R^{2(m+n-\kappa-1)}W_{2m+4,2n+4}=0;$$

$\kappa = 1, 2, \dots, 11.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушевский А.Е., Севенюк А.З. Приближенное определение спектра частот продольных колебаний упругого параллелепипеда при точном выполнении краевых условий на его четырех гранях. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1978, вып. 5.

УДК 539.3

А.Е.Крушевский, О.Н.Скляр

ПОСТРОЕНИЕ СТРУКТУРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИЗГИБА УПРУГОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ПРИ ОТСУТСТВИИ НАГРУЗКИ НА ЧЕТЫРЕХ ГРАНЯХ

Построение структуры решения задачи изгиба для рядов аппроксимирующих функций любой степени имеет важное теоретическое и практическое значение, так как построенные ряды позволяют получать уточнение задачи с любой степенью точности [1].

Решение задачи строится следующим образом. Записываем ряды аппроксимирующих функций:

$$U = \sum_{m_1=1;\, n_1=1}^{m+n=\infty} x^{2m-1}\, y^{2n-1}\, U_{2m-1;\,2n-1}(z);$$

$$V = \sum_{m_1=1;\, n_1=1}^{m+n=\infty} x^{2m-2}\, y^{2n-2}\, V_{2m-2;\,2n-2}(z);$$

$$W = \sum_{m_1=1;\, n_1=1}^{m+n=\infty} x^{2m-2}\, y^{2n-1}\, W_{2m-2;\,2n-1}(z).$$

Далее, исходя из условий отсутствия нагрузки на боковой поверхности записываем уравнения связей [2].

Условия на боковой поверхности (рис. 1):

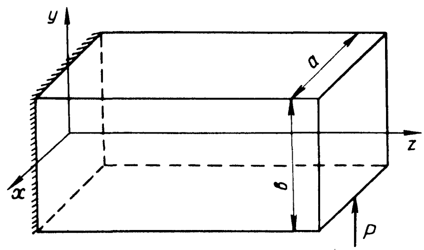

Рис. 1. Изгиб упругого параллелепипеда сосредоточенной силой P.

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \gamma G \frac{\partial U}{\partial x} + \gamma_2 G\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) = 0;\\
\tau_{xy} &= G\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0;\\
\tau_{xz} &= G\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right) = 0;
\end{aligned}\right\} \quad \text{при } x = \pm\frac{a}{2}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_y &= \gamma G \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma_2 G\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) = 0;\\
\tau_{yx} &= G\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0;\\
\tau_{yz} &= G\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}\right) = 0.
\end{aligned}\right\} \quad \text{при } y = \pm\frac{b}{2}$$

Задача разбивается на IV напряженных состояния.

I напряженное состояние

$$U = 0;$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{b}{2}\right)^{2n} \left[y^2 d_z - \frac{n}{n+1} \left(\frac{b}{2}\right)^2 d_z - \frac{4n}{d_z}\right] - \frac{y^{2n+2}}{n+1} d_z \right\} W_{0,2n+1};$$

$$W = y \sum_{n_1=1}^{\infty} \left(y^{2n} - \frac{b^{2n}}{4^n}\right) W_{0,2n+1}.$$

II напряженное состояние

а) $U = 0;\ W = 0;$

$$V = x^2 \left\{ \left[x^{2m+2} - (m+2)\frac{a^{2m+2}}{4^{m+1}} - (m+1)\left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}\right] \left[y^{2n+2} - \left(\frac{b}{2}\right)^{2n+2} - (n+1)\left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right)\left(\frac{b}{2}\right)^{2n}\right] \right\} V_{2m+4;\,2n+2};$$

б) $U = 0;\ W = 0;$

$$V = \frac{x^2}{2}\left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right) \left\{ \frac{(n-1)}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^{2n-4}\left(y^4 - \frac{b^4}{16}\right) - \frac{1}{n}\left(y^{2n} - \frac{b^{2n}}{4^n}\right) - (n-2)\left(\frac{b}{2}\right)^{2n-2}\left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \right\} W'_{4,2n-1}.$$

III напряженное состояние

$U = 0;$

$$V = \frac{x^2}{2} \left\{ \left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right) m \left(\frac{a}{2}\right)^{2m-2} \left[(2n+1)\left(\frac{b}{2}\right)^{2n}\left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) - \frac{1}{n+1}\left(y^{2n+2} - \frac{b^{2n-2}}{4^{n+1}}\right) \right] + 2\gamma_2 n \left(\frac{b}{2}\right)^{2n}\left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \left[x^{2m} - (m+1)\frac{a^{2m}}{4^m} - m\left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)^{2m-2} - \left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right) mn \left(\frac{a}{2}\right)^{2m-2} \times \left(\frac{b}{2}\right)^{2n-2} \left[\frac{3b^2}{4}\left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(y^4 - \frac{b^4}{16}\right)\right]\right] \right\} W'_{2m+2;\,2n+1};$$

$$W = x^2 y \left\{ \left[x^{2m} - (m+1)\frac{a^{2m}}{4^m}\right]\left[y^{2n} - (2n+1)\frac{b^{2n}}{4^n}\right] - \left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right) \times \left(y^2 - \frac{3b^2}{4}\right) mn \left(\frac{a}{2}\right)^{2m-2}\left(\frac{b}{2}\right)^{2n-2} \right\} W_{2m-2;\,2n+1}.$$

IV напряженное состояние

$$U = \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} x^{2m-1} y^{2n-1} U_{2m-1;\,2n-1};$$

$$V = \frac{x^2}{2} \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \Big\{ (x^2 - \frac{a^2}{2}) (\frac{a}{2})^{2m-6} [\frac{\gamma (2m-1)}{\gamma\, 2n} (y^{2n} - \frac{b^{2n}}{4^n}) -$$

$$- (2n-1) \frac{a^2}{4} (y^{2n-2} - \frac{b^{2n-2}}{4^{n-1}})] - \frac{\gamma}{8} (x^2 - \frac{a^2}{2}) (\frac{a}{2})^{2m-6} \times$$

$$\times (\frac{b}{2})^{2n-6} [\frac{3b^2}{4} (y^2 - \frac{b^2}{4}) - \frac{1}{2} (y^4 - \frac{b^4}{16})] [\frac{2\gamma(2m-1) b^2}{4\gamma_2} -$$

$$- (n-1)(2n-1) \frac{a^2}{4}] - (2n-1) [(\frac{a}{2})^{2m-2} y^{2n-2} +$$

$$+ \frac{1}{m} (\frac{b}{2})^{2n-2} (x^{2m-2} - m\frac{a^{2m-2}}{y^{m-1}})] \Big\} U_{2m-1;\,2n-1} -$$

$$- \frac{x^2}{2} \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \gamma_2 (2m+1) (\frac{b}{2})^{2n-4} \Big\{ (x^2 - \frac{a^2}{2}) \frac{(m-2)}{8} (\frac{a}{2})^{2m-4} \times$$

$$\times [\frac{3b^2}{4} (y^2 - \frac{b^2}{4}) - \frac{1}{2} (y^4 - \frac{b^4}{16})] + \frac{b^2}{4\gamma} (y^2 - \frac{b^2}{4}) [x^{2m-2} -$$

$$- m (\frac{a}{2})^{2m-2} - (m-1)(x^2 - \frac{a^2}{2}) (\frac{a}{2})^{2m-4}] \Big\} U_{2m+1;\,2n-1} +$$

$$+ \frac{3\gamma_2 x^2}{16} (x^2 - \frac{a^2}{2}) (\frac{a}{2})^{-2} (\frac{b}{2})^{2n-4} [\frac{3b^2}{4} (y^2 - \frac{b^2}{4}) - \frac{1}{2} (y^4 -$$

$$- \frac{b^4}{16})] U_{3,2n-1} - \frac{x^2}{2} \Big\{ \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} (x^2 - \frac{a^2}{2}) (\frac{a}{2})^{2m-4} \times$$

$$\times [\frac{1}{2n} (y^{2n} - \frac{b^{2n}}{4^n}) + \frac{(m-1)(2n-1)}{m} (\frac{b}{2})^{2n-2} (y^2 - \frac{b^2}{4})] -$$

$$- (x^2 - \frac{a^2}{4}) \frac{(\gamma + 2)}{8} [\frac{1}{2} + \frac{(m-1)(2n-1)}{m}] (\frac{a}{2})^{2m-4} (\frac{b}{2})^{2n-4} \times$$

$$\times [\frac{3b^2}{4} (y^2 - \frac{b^2}{4}) - \frac{1}{2} (y^4 - \frac{b^4}{16})] - \gamma_2 \frac{(2n-1)}{2\gamma\, m} (\frac{b}{2})^{2n-2} \times$$

$$\times (y^2 - \frac{b^2}{4}) [x^{2m-2} - m\frac{a^{2m-2}}{4^{m-1}} - (m-1)(x^2 - \frac{a^2}{2}) \times$$

$$\times (\frac{a}{2})^{2m-4}] \Big\} U''_{2m-1;\,2n-1};$$

$$W = \frac{x^2 y}{2} \left\{ \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{m} \left(\frac{b}{2}\right)^{2n-2} \left(x^{2m-2} - m\frac{a^{2m-2}}{4^{m-1}}\right) - \right.$$

$$- \left(\frac{a}{2}\right)^{2m-2} y^{2n-2} + \left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right)\left(y^2 - \frac{3b^2}{4}\right) \frac{(\gamma + 2)}{4} \left(\frac{a}{2}\right)^{2m-4} \times$$

$$\times \left(\frac{b}{2}\right)^{2n-4} \left[\frac{1}{2} + \frac{(m-1)(2n-1)}{m}\right] \Big\} U'_{2m-1;\,2n-1} - \frac{x^2 y}{8d_z} \left(x^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{a^2}{2}\right)\left(y^2 - \frac{3b^2}{4}\right)\left(\frac{a}{2}\right)^{2m-6} \left(\frac{b}{2}\right)^{2n-6} \left\{ \gamma \left[\frac{2\gamma(2m+1)b^2}{4\gamma_2} - \right.\right.$$

$$- (n-1)(2n-1)\frac{a^2}{4} \Big] U_{2m-1;\,2n-1} + \gamma_2 (m-2)(2m+1)\frac{a^2 b^2}{16} \times$$

$$\times U_{2m+1;\,2n-1} \Big\} + \frac{3\gamma_2 x^2 y}{8d_z}\left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right)\left(y^2 - \frac{3b^2}{4}\right)\left(\frac{a}{2}\right)^{-2} \times$$

$$\times \left(\frac{b}{2}\right)^{2n-4} U_{3,2n-1} \,.$$

Анализ полученных выражений показывает, что для первых трех напряженных состояний характерно отсутствие поперечной депланации ($U = 0$), причем первое и третье напряженно-деформированное состояние по своему характеру приближается к элементарной теории сопромата. Общее у них то, что деформированное состояние определяется лишь двумя перемещениями, причем продольное перемещение W обращается в нуль при $y = 0$ (нейтральный слой). Отличие состоит в том, что имеется продольная депланация, т.е. не выполняется гипотеза плоских сечений, и что напряжения σ_y не равны нулю, т.е. имеется давление одних волокон на другие.

Для второго деформированного состояния характерно равенство нулю двух перемещений $U = W = 0$, а на гранях $y = \pm \frac{b}{2}$ отсутствие и перемещений $V \big|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0$.

Четвертое напряженно-деформированное состояние характеризуется наличием депланации, как продольной, так и поперечной, т.е. все три перемещения отличны от нуля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т и м о щ е н к о С.П. Курс теории упругости. — Киев, 1972. 2. К р у ш е в с к и й А.Е., С к л я р О.Н. Изгиб упругого параллелепипеда при точном выполнении условий отсутствия нагрузки на четырех боковых гранях. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1979, вып. 6.

УДК 539.3

Н.Я.Бойко

РАВНОВЕСИЕ УПРУГОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА С ТРЕМЯ СВОБОДНЫМИ ОТ НАГРУЗКИ ГРАНЯМИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ НА ЧЕТВЕРТОЙ ГРАНИ И ИМЕЮЩЕГО НУЛЕВОЕ НОРМАЛЬНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ И ОДНО НУЛЕВОЕ КАСАТЕЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ НА ОСТАВШИХСЯ ДВУХ ГРАНЯХ

Эта задача решается, как задача статики, для упругого параллелепипеда при известных на торцах $z = \pm \frac{h}{2}$ нормальных перемещениях и касательных напряжениях. Как известно, это сочетание краевых условий дает возможность получать решение задачи в замкнутом виде. Имеет следующие краевые условия:

$$\text{при } z = \pm \frac{h}{2} \quad w_z^{\pm} = 0; \tau_{xz} = 0; \ \tau_{yz} = +Y_z^{\pm} \ ; \tag{1}$$

$$\text{при } y = +\frac{b}{2} \quad \sigma_y = -2Y_y^{+}; \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0; \tag{2}$$

$$\text{при } y = -\frac{b}{2} \quad \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0 \ ; \tag{3}$$

$$\text{при } x = \pm \frac{a}{2} \quad \sigma_x = \tau_{yx} = \tau_{zx} = 0. \tag{4}$$

Решение задачи (1)—(4) получается как результат наложения решений двух задач, а именно: задачи сжатия с теми же условиями (4), но

$$\text{при } z = \pm \frac{h}{2} \quad w_z^{\pm} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \ ; \tag{1'}$$

$$\text{при } y = +\frac{b}{2} \quad \sigma_y = -Y_y^{+}; \ \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0; \tag{5}$$

$$\text{при } y = -\frac{b}{2} \quad \sigma_y = +Y_y^{+}; \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0 \tag{6}$$

и задачи изгиба с теми же условиями (1) и (4), но