

руют меньше (рис. 2,а). При очень малых скоростях охлаждения напряжения сами по себе незначительны и доля, приходящаяся на релаксацию, уменьшается. Существует оптимальная скорость охлаждения, при которой достигается максимальная релаксация температурных напряжений. Эта скорость зависит от свойств материала.

Сравнивая результаты данных исследований с результатами работы [3], можно сказать, что характер распределения температурных напряжений в материале ЭД-20М при фронтальном переходе зоны высокоэластичного состояния в зону стеклообразного состояния сходен с характером распределения напряжений в цилиндрической отливке из металла при ее затвердевании. Это дает широкие возможности для постановки задач о моделировании процесса изготовления металлических деталей.

На примере охлаждения цилиндрического блока (материал ЭД-20М) показана возможность управления процессом релаксации температурных напряжений в зависимости от скорости охлаждения (нагрева).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Метод фотоупругости. Под общ. ред. Г.Л. Х е с и н а. — М., 1975. т. 1.
2. Т и м о ш е н к о С.П. Теория упругости. — М., 1955.
3. Л е в и н М.А. Определение напряжений в затвердевающей отливке: Прикладная механика, т. V, вып. 9. Киев, 1969.

УДК. 534.29

**М.Д.Мартыненко, Н.А.Долбин,  
И.Г.Довгялло, Р.М.Кончиц**

#### **ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ НА СОБСТВЕННУЮ ЧАСТОТУ ПРОДОЛЬНО КОЛЕБЛЮЩИХСЯ МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ СТЕРЖНЕЙ**

Расчет многоступенчатых стержней на высокочастотную вибрацию представляет сложную в математическом отношении задачу, поэтому он выполняется на основе ряда упрощений [1–3]. Наиболее часто предполагают, что в каждый момент времени поперечные сечения стержня остаются плоскими и напряжения по ним распределяются равномерно. Тогда при отсутствии вынуждающей силы определение продольного перемещения  $u(x, t)$  точек этого сечения сводится к интегрированию следующего уравнения:

$$\rho_i F_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [E_i(x) F_i(x) \frac{\partial u}{\partial x}] , \quad (1)$$

где  $\rho_i$ ,  $E_i$ ,  $F_i$  – плотность, модуль Юнга и площадь поперечного сечения  $i$ -й ступени.

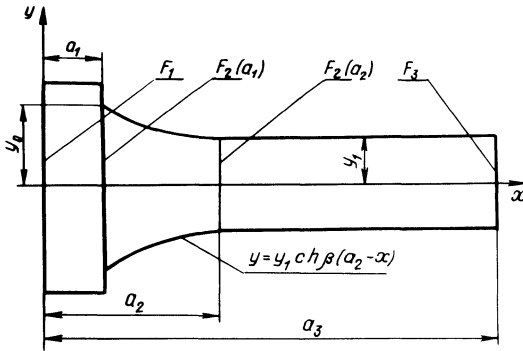


Рис. 1. Расчетная схема стержня.

Рассмотрим для определенности стержень, состоящий из двух цилиндрических ступеней. Предположим, что галтельный переход выполнен в виде катенеидальной ступени (рис. 1),  $\rho_i = \rho = \text{const}$ ;  $E_i = \text{const}$ , один конец стержня ( $y = 0$ ) закреплен, другой ( $x=0$ )-свободен от внешних усилий. Обозначим  $y_0$  и  $y_1$ , наибольший и наименьший радиусы катенеидальной ступени. Тогда уравнение ограничивающей ее катенеиды имеет вид

$$y = y_1 \text{ch } \beta (a_2 - x) .$$

Из отношения  $y_0/y_1 = \frac{e^{\beta (a_2 - a_1)} + e^{-\beta (a_2 - a_1)}}{2}$  получаем значение коэффициента  $\beta$  в виде

$$\beta = \frac{1}{a_2 - a_1} \ln \frac{y_0 + \sqrt{y_0^2 - y_1^2}}{y_1} \text{ и } F_2(x) = \pi y_1^2 \text{ch}^2 \beta (a_2 - x) . \quad (2)$$

Полагая  $\rho_i = \rho = \text{const}$ , получим для определения  $\varphi$  и  $\Psi$  следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} - \alpha \varphi = 0 ;$$

$$\frac{d}{dx} [E_i(x) \frac{d\psi}{dx}] - \frac{\alpha \rho}{E} F_i(x) \psi = 0, \quad (3)$$

где  $\alpha$  — некоторый параметр.

Исходя из условий перемещений и сопряжений на границах участков, получим следующие граничные условия:

$$\psi/x = 0 = \psi'/x = a_3 = 0; \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi/x = a_{i+0} = \psi/x = a_{i-0}; \\ F_i \psi'/x = a_{i+0} = F_i \psi'/x = a_{i-0}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Из самосопряженности выражения, стоящего в левой части (3) и условий (4), (5), следует вещественность  $\alpha = -\kappa^2$  ( $\kappa \neq 0$ ) [4].

Полагая в (3)  $\alpha = -\kappa^2$ , получим следующие зависимости для амплитуды колебаний  $\psi(x)$  стержней постоянного сечения:

$$\psi_1(x) = L_1 \cos \kappa x + M_1 \sin \kappa x; \quad 0 < x < a_1; \quad (6)$$

$$\psi_3(x) = L_3 \cos \kappa(x - a_2) + M_3 \sin \kappa(x - a_2); \quad a_2 < x < a_3. \quad (7)$$

Для галтельного перехода дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{1}{\text{ch}^2 \beta(x - a_1)} \frac{d}{dx} [\text{ch}^2 \rho(x - a_1) \frac{d\psi_2}{dx}] + \kappa^2 \psi_2 = 0; \quad a_1 < x < a_2. \quad (8)$$

Положим, что  $\psi_2 = \frac{z}{\text{ch} \beta(x - a_1)}$ . Тогда уравнение (8) запишется так:

$$\frac{1}{\text{ch}^2 \beta(x - a_1)} \left[ \frac{d^2 z}{dx^2} - \beta^2 z \right] + \kappa^2 \frac{z}{\text{ch} \beta(x - a_1)} = 0. \quad (9)$$

Если  $z$  есть решение этого уравнения, то  $z'' - (\kappa^2 - \beta^2)z = 0$ .

Для случая  $\beta > \kappa$  решение уравнения (8) имеет вид

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\text{ch} \beta(x - a_1)} \left\{ L_2 \text{ch} \sqrt{\beta^2 - \kappa^2} (x - a_1) + M_2 \text{ch} \sqrt{\rho^2 - \kappa^2} (x - a_1) \right\}. \quad (10)$$

Подставив граничные условия (4), (5) в уравнения (6), (7) и (10), получим выражения постоянных интегрирования

$$\left. \begin{aligned}
 L_1 &= 0; \\
 L_2 &= M_1 \sin \kappa a_1; \\
 L_3 &= \frac{1}{\operatorname{ch} \beta (a_2 - a_1)} L_2 \operatorname{ch} \sqrt{\beta^2 - \kappa^2} (a_2 - a_1) + M_2 \operatorname{sh} \sqrt{\beta^2 - \kappa^2} (a_2 - a_1); \\
 L_3 \sin \kappa (a_3 - a_2) - M_3 \cos \kappa (a_3 - a_2) &= 0; \\
 M_2 &= \frac{M_1}{\sqrt{\beta^2 - \kappa^2}} \left[ \frac{F_1}{F_2(a_1)} \kappa \cos \kappa a_1 \operatorname{ch} \beta (a_2 - a_1) - \right. \\
 &\quad \left. - \beta \sin \kappa a_1 \operatorname{sh} \beta (a_2 - a_1) \right]; \\
 M_3 &= \frac{1}{\kappa} \frac{F_2(a_2)}{F_3} \sqrt{\beta^2 - \kappa^2} \left[ L_2 \operatorname{sh} \sqrt{\beta^2 - \kappa^2} (a_2 - a_1) + \right. \\
 &\quad \left. + M_2 \operatorname{ch} \sqrt{\beta^2 - \kappa^2} (a_2 - a_1) \right].
 \end{aligned} \right\} (11)$$

Положив, что  $\cos \kappa a_1 \neq 0$ ;  $\cos \kappa (a_3 - a_2)$  и  $\operatorname{ch} \sqrt{\beta^2 - \kappa^2} (a_2 - a_1) \neq 0$ , из выражений (11) приходим к уравнению для определения собственной частоты колебаний  $\kappa$ :

$$\begin{aligned}
 &\sqrt{\beta^2 - \kappa^2} \operatorname{tg} \kappa a_1 \left[ \frac{F_2(a_2)}{F_3} \frac{\sqrt{\beta^2 - \kappa^2}}{\kappa} \operatorname{th} \sqrt{\beta^2 - \kappa^2} (a_2 - a_1) - \right. \\
 &\quad \left. - \operatorname{tg} \kappa (a_3 - a_2) \right] + \left[ \kappa \frac{F_1}{F_2(a_1)} - \beta \operatorname{tg} \kappa a_1 \operatorname{th} \beta (a_2 - a_1) \right] \times \\
 &\times \left[ \frac{F_2(a_2)}{F_3} \frac{\sqrt{\beta^2 - \kappa^2}}{\kappa} - \operatorname{tg} \kappa (a_3 - a_2) \operatorname{th} \sqrt{\beta^2 - \kappa^2} (a_2 - a_1) \right].
 \end{aligned} \quad (12)$$

Если предположить, что галтельный переход в расчетной схеме отсутствует, т.е. если  $a_2 = a_1$  или же  $y_0 = y_1$ , то получаем известное уравнение частот для двухступенчатого стержня кусочно-постоянного сечения

$$\operatorname{tg} \kappa a_1 \operatorname{tg} \kappa (a_3 - a_1) = F_1 / F_3.$$

Корни уравнений (12), (13) определялись на ЭВМ "Мир-2" методом деления отрезка пополам, для чего вначале отделялись интервалы (в которых находились значения этих корней) методом табулирования функции. При этом исходя из физической постановки задачи рассматривалась только первая гармоника.

Таблица 1

$a_3$ , мм	$a_2=46$ мм, $\beta=42$ 1/м	$a_2=22$ мм, $\beta=100$ 1/м	$a_2=18$ мм, $\beta=131$ 1/м	$a_2=7$ мм, $\beta=855$ 1/м	$a_2=5,5$ мм, $\beta=3420$	$a_2=5$ мм, $\beta=\infty$
65	35,5	29,7	28,7	26,4	26,1	24,1
100	20,3	17,9	17,6	16,6	16,5	15,7
135	14,0	12,8	12,6	12,2	12,1	11,6
185	9,7	9,1	8,9	8,8	8,7	8,5

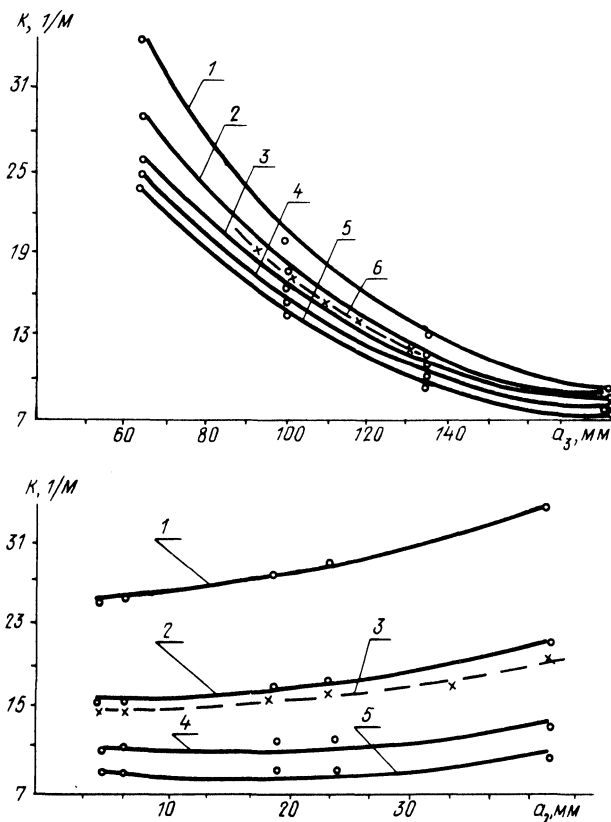


Рис. 2. Зависимость волнового коэффициента от геометрических параметров стержня:

1-5 -  $a_3 = 60$  мм, 95, 95, 130, 180 мм соответственно;

1-6 -  $\beta = 41$  1/м; 100, 850, 3420,  $\infty$  и 100 1/м соответственно.

Сплошные линии - расчетные кривые;

штриховые - экспериментальные.

С целью исследования влияния галтельного перехода, определяемого коэффициентом  $\beta$  (при определенных размерах стержня) на собственную частоту продольных колебаний  $k$ , значения геометрических параметров в уравнениях (12), (13) варьировали в определенных пределах.

Значения частоты собственных колебаний (первые корни) в зависимости от геометрических параметров стержня при  $y_0 = 3,5$  мм,  $y_1 = 7$  мм и  $a_1 = 5$  мм приведены в табл. 1 и на рис. 2.

Как видно из приведенных данных, геометрические параметры галтельного перехода существенно влияют на частоту собственных колебаний многоступенчатых стержней, причем это влияние усиливается при увеличении значения  $k$ . Поэтому при расчете колебательных систем (концентраторов, образцов), применяемых в ультразвуковой технике, пренебрежение галтельными переходами приводит к известным ошибкам.

С целью проверки правильности предложенной методики расчета многоступенчатых стержней были проведены эксперименты на образцах из сплава Д16 при принятых в расчетах значениях  $y_0$ ,  $y_1$ ,  $a_1$  и коэффициенте  $\beta = 100$ .

В качестве источника электрической энергии ультразвуковой частоты был применен стандартный ультразвуковой генератор УЗГ10-22 с выходной мощностью 10 кВт и частотой 14...20 кГц, работающий по схеме с самовозбуждением. Преобразование электрических колебаний в механические осуществлялось магнитоэлектрическим преобразователем ПМС 15А-18. Автоматическая подстройка генератора осуществлялась с помощью обратной акустической связи. Для передачи мощности с преобразователя на образец использовался концентратор колебаний, форма которого представляла сочетание цилиндрической и конической поверхностей. Частота колебаний определялась электронным частотомером 43-9.

Экспериментальные данные, обозначенные звездочками, приведены на рис. 2. Результаты эксперимента не более 2% отличаются от теоретических. Это говорит о правильности принятой методики расчета многоступенчатых стержней с учетом галтельных переходов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К о л ь с к и й Г.Е. Волны напряжения в твердых телах. — М., 1965.
2. Д е й в и с Р.М. Волны напряжений в твердых телах. — М., 1961.
3. С е р е н с е н С.В., Г а р ф М.Э., К у з ь м е н к о в В.А. Динамика машин для испытаний на усталость. — М., 1967.
4. М а р т ы н е н к о М.Д., Д о в г я л л о И.Г. О высокочастотных продольных колебаниях многоступенчатых стержней переменного сечения. — В сб.: Механизация лесоразработок и транспорт леса. Мн., 1979, вып. 9.