

ЛИТЕРАТУРА

1. Л у ж и н О.В. Осесимметричные колебания сферических куполов при различных граничных условиях. — В кн.: Исследования по теории сооружений. М., 1962, вып. XI. 2. Л и з а р е в А.Д. О низших частотах собственных осесимметричных колебаний непологих сферических оболочек. — МТТ, 1967, № 3. 3. Л и з а р е в А.Д., Р о с т а н и н а Н.Б. Некоторые обратные задачи теории колебаний сферических оболочек. Прикладная механика. 1967, т. XII, № 5. 4. Г р а д ш т е й н И.С., Р ы ж и к И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М., 1962.

УДК 532.135

Е.Н.Ламбина

О ХАРАКТЕРЕ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКО-УПРУГИХ ЛИНЕЙНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Решение ряда задач течения вязкой несжимаемой жидкости имеет вид

$$U = U_0 + \sum_{m=1}^{\infty} U_m \cdot e^{-\mu \lambda_m t}, \quad (1)$$

где U_0 и U_m зависят только от координат и не зависят от коэффициента вязкости μ ; λ_m — положительные коэффициенты, не зависящие от μ , причем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = \infty; \quad U|_{t=0} = 0.$$

К таким задачам относятся задачи течения вязкой жидкости между параллельными плоскостями, между коаксильными цилиндрами и т.п. [1]. Назовем течения подобного типа экспоненциальными. Определим соответствующие им течения вязко-упругой жидкости с функцией релаксации

$$\mu(t) = \sum_{i=1}^n G_i e^{-s_i t}; \quad s_i = \frac{G_i}{\eta_i} \quad [2].$$

Используя принцип соответствия для вязко-упругих жидкостей [3], получим

$$\bar{U} = \frac{U_0}{s} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{U_m}{s + \mu \lambda_m};$$

$$\bar{\mu}(s) = \frac{\sum_{i=1}^n G_i}{s + s_i} = \frac{\sum_{\kappa=1}^n G_{\kappa} \prod_{i \neq \kappa} (s + s_i)}{\prod_{i=1}^n (s + s_i)} ;$$

$$\begin{aligned} \bar{U}' &= \frac{U_0}{s} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{U_m}{s + \lambda_m \bar{\mu}(s)} = \\ &= \frac{U_0}{s} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{U_m \prod_{i=1}^n (s + s_i)}{s \prod_{i=1}^n (s + s_i) + \lambda_m \sum_{\kappa=1}^n G_{\kappa} \prod_{i \neq \kappa} (s + s_i)} \end{aligned}$$

Используя теорему о разложении [4], находим

$$U' = U_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{jm} \sum_{j=1}^{n+1} U_m e^{s_{jm} t}, \quad (2)$$

где s_{jm} – корни уравнения $(n+1)$ степени

$$\varphi(s) = s \prod_{i=1}^n (s + s_i) + \lambda_m \sum_{\kappa=1}^n G_{\kappa} \prod_{i \neq \kappa} (s + s_i) = 0 \quad (3)$$

и

$$A_{jm} = \frac{\prod_{i=1}^n (s + s_i) \sum_{\kappa=1}^n G_{\kappa} \prod_{i \neq \kappa} (s + s_i)}{2 \sum_{\kappa=1}^n G_{\kappa} (s + \frac{s_{\kappa}}{2}) \prod_{i \neq \kappa} (s + s_i)} \Big|_{s=s_{jm}}$$

Иследуем корни характеристического уравнения.

Утверждение 1. Действительные части всех корней уравнения (3) отрицательны.

Доказательство. Уравнение (3) эквивалентно уравнению

$$\varphi(s) = s + \lambda_m \sum_{i=1}^n \frac{G_i}{s + s_i} = 0. \quad (4)$$

Пусть $s_{jm} = a_{jm} + b_{jm} i$.

Тогда $\bar{s}_{jm} = a_{jm} - b_{jm} i$;

$$\varphi(s_{jm}) + \varphi(\bar{s}_{jm}) = 2a_{jm} + 2\lambda_m \sum_{i=1}^n \frac{G_i (s_i + a_{jm})}{(s_i + a_{jm})^2 + b_{jm}^2} = 0;$$

$$a_{jm} \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{G_i \lambda_m}{(s_i + a_{jm})^2 + b_{jm}^2} \right) = - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_m G_i s_i}{(s_i + a_{jm})^2 + b_{jm}^2}.$$

Из положительности выражений

$$1 + \sum_{i=1}^n \frac{G_i \lambda_m}{(s_i + a_{jm})^2 + b_{jm}^2} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_m G_i s_i}{(s_i + a_{jm})^2 + b_{jm}^2}$$

следует утверждение 1.

Из утверждения 1 следует, что при $t \rightarrow \infty$ вязко-упругое течение приближается к установившемуся течению вязкой жидкости.

Утверждение 2. Уравнение (3) имеет по крайней мере $(n-1)$ действительных корней.

Доказательство. Не ограничивая общности задачи, можно считать, что $s_i > s_K$ при $i > k$.

$$\text{Из (3) получим: } \psi(-s_K) = \lambda_m \prod_{i \neq k} (s_i - s_K).$$

Нетрудно видеть, что $\text{sign } \psi(-s_K) = \text{sign}(-1)^{n-k}$.

Следовательно, между $-s_K$ и $-s_{K+1}$ лежит по крайней мере один корень уравнения (3), отсюда и следует справедливость утверждения 2.

Утверждение 3. Все действительные корни уравнения (3) расположены в интервале $[-s_1, 0]$.

Доказательство. Справедливость верхней границы следует из утверждения 1. Справедливость нижней границы следует из того, что при $s < -s_1$ все слагаемые выражения (3) будут одного знака и, следовательно, $\psi(s) \neq 0$.

Утверждение 4. При достаточно большом m уравнение (3) имеет пару комплексно-сопряженных корней.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (4), эквивалентное (3). $\varphi(s)$ непрерывна в интервалах $(-s_K; -s_{K+1})$ и $(-s_n, 0)$. Если бы все корни уравнения (4) были действительными, то по крайней мере на одном из рассмотренных интервалов лежало бы более одного действительного корня и $\varphi'(s)$ обращалось бы в ноль в некоторых точках этого интервала

$$\varphi'(s) = 1 - \lambda_m \sum_{i=1}^n \frac{G_i}{(s+s_i)^2} \leq 1 - \lambda_m K^2,$$

где K^2 – минимум выражения $\sum_{i=1}^n \frac{G_i}{(s+s_i)^2}$ в области $-s_1 < s < 0$.

При достаточно большом m для всех $-s_1 < s < 0$ $\varphi'(s) < 0$. Следовательно, действительных корней только $(n-1)$ и существует пара комплексно-сопряженных корней.

Из рассмотренных утверждений следует, что для тех неустановившихся течений, где для вязкой жидкости наблюдается апериодическое приближение к установившемуся режиму, в вязко-упругих жидкостях на апериодическое течение накладываются быстро затухающие колебания. (Апериодические компоненты в разложении существуют всегда при $n > 1$)

ЛИТЕРАТУРА

1. Т а р г С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. — М.-Л., 1951.
2. К р и с т е н с е н Р. Введение в теорию вязко-упругости. — М., 1974.
3. Л а м б и н а Е.Н. О принципе соответствия для медленных неустановившихся течений вязко-упругих линейных жидкостей. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск, 1980, вып. 7.
4. К о р н Г., К о р н Т. Справочник по математике для научных работников. — М., 1970.

УДК 532.135

Б.И.Лапушина

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКО-УПРУГОЙ СРЕДЫ МАКСВЕЛЛА В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ЦИЛИНДРАМИ

Рассмотрим течение вязко-упругой среды, описываемой уравнением

$$S = 2 \int_0^t \mu(t - \tau) \dot{\epsilon}(\tau) d\tau, \quad (1)$$

$$-\frac{G}{\eta} t$$

где $\mu(t) = G e^{-\frac{G}{\eta} t}$ (модель Максвелла) в зазоре между круглыми соосными цилиндрами (рис. 1).

В (1) S — девиатор напряжений; $\dot{\epsilon}$ — девиатор скоростей деформации; $\mu(t)$ — функция релаксации.

Уравнение движения, пренебрегая массовыми силами и конвективными членами, запишем в виде

$$\text{Div } S = \rho \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (2)$$

Уравнение неразрывности

$$\text{div } v = 0. \quad (3)$$