УДК 539.3

А.Е. Крушевский, А.З. Севенюк

ПОСТРОЕНИЕ СТРУКТУРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СПЕКТРА ЧАСТОТ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С КРУГЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ

В расчетах на прочность стержней при динамической нагрузке необходимо знать собственные функции, зависящие от собственных чисел (частот). На практике при определении спектра собственных частот стержней пользуются приближенной технической теорией. Задача точного определения спектра собственных частот стержней является сложной ввиду больших математических трудностей. В статье [1] дано построение структуры решения данной задачи для упругого параллелепипеда с учетом полиномов третьей степени. Естественно возникает вопрос: можно ли построить структуру решения при учете полиномов любой степени? Это, во-первых, позволит строить решение задачи в более уточненной постановке, а, во-вторых, появится возможность рассмотреть более сложные формы поперечного сечения по сравнению с прямоугольником. Вследствие того, что в поставленной задаче стержень закреплен одним своим концом, при построении решения исключим из рассмотрения упругие перемещения, не зависящие от продольной координаты z стержня. Структуру решения задачи для упругого параллелепипеда при отсутствии нагрузки на его четырех гранях получим, обобщая результаты статьи [1] с учетом вышесказанного

$$u = x \sum_{m=1} \left[\frac{1}{2m+1} \left(\frac{a^{2m}}{4^m} - x^{2m} \right) - \frac{2m}{4^{m-1} d_z^2} \right] d_z W_{2m,0} ;$$

$$v = y \sum_{n=1} \left[\frac{1}{2n+1} \left(\frac{b^{2n}}{4^n} - y^{2n} \right) - \frac{2n}{4^{n-1} d_z^2} \right] d_z W_{0,2n} ;$$

$$w = W_{00} + \sum_{m=1} x^{2m} W_{2m,0} + \sum_{n=1} y^{2n} W_{0,2n} + \left(\frac{d^2}{4} - x^2 \right)^2 \times$$

$$\times \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right)^2 \sum_{m=1} \sum_{n=1} x^{2m} y^{2n} W_{2m+4,\, 2n+4} .$$

Уравнения связей, полученных из условия отсутствия напряжений на гранях $x = \pm \frac{a}{2}$, $y = \pm \frac{b}{2}$, имеют вид:

$$\gamma_2 d_z W_{00} + \sum_{m=1} \left[\left(\frac{\gamma}{2m+1} - 2 \right) \frac{a^{2m}}{4^m} - \frac{2\gamma m}{4^{m-1}} \frac{a^{2m-2}}{d_z^2} \right] d_z W_{2m,0} +$$

$$+ \gamma_2 \sum_{n=1} \left(\frac{1}{2n+1} \frac{b^{2n}}{4^n} - \frac{2nb^{2n-2}}{4^{n-1} d_z^2} \right) d_z W_{0,2n} = 0;$$

$$\gamma_2 d_z W_{00} + \gamma_2 \sum_{m=1} \left(\frac{1}{2m+1} \frac{a^{2m}}{4^m} - \frac{2ma^{2m-2}}{4^{m-1} d_z^2} \right) d_z W_{2m,0} +$$

$$+ \sum_{n=1} \left[\left(\frac{\gamma}{2n+1} - 2 \right) \frac{b^{2n}}{4^n} - \frac{2\gamma n b^{2n-2}}{4^{n-1} d_z^2} \right] d_z W_{0,2n} = 0 .$$

Для выполнения условий отсутствия напряжений на поверхности цилиндрического отверстия запишем выражения для поверхностных напряжений:

$$\sigma_n = \frac{1}{R^2} \left(x^2 \sigma_x + 2xy \tau_{xy} + y^2 \sigma_y \right);$$

$$\tau_{n\theta} = \frac{1}{R^2} \left[xy (\sigma_y - \sigma_x) + (x^2 - y^2) \tau_{xy} \right];$$

$$\tau_{nz} = \frac{1}{R^2} \left(x \tau_{xz} + y \tau_{yz} \right).$$

Результаты проделанных выкладок показали, что для выполнения поставленных условий потребовались степенные ряды до 22-й степени включительно.

Уравнения связей, полученных из условий отсутствия напряжений σ_n $\tau_{n\theta}$, τ_{nz} на цилиндрической поверхности, записываются в виде:

$\sigma_n = 0$ при $r = R$

1. $$\sum_{m=1}^{11} \left(\frac{a^{2m}}{4^m} - R^2 \right) W^1_{2m,0} = 0 ;$$

2. $$\frac{2}{R^2} \sum_{m=1}^{11} mR^{2m} W'_{2m,0} + \gamma_2 \sum_{m=1}^{11} \left\{ R^{2m} \frac{a^4}{16} \left(\frac{b^2}{4} - R^2 \right)^2 + R^{2m+2} \left[\frac{a^4}{8} x \right. \right.$$

$$\times\left(\frac{b^2}{4}-R^2\right)-\frac{a^2}{2}\left(\frac{b^2}{4}-R^2\right)^2\right]+R^{2m+4}\left[\frac{a^4}{16}-a^2\left(\frac{b^2}{4}-R^2\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{b^2}{4}-R^2\right)^2\right]+R^{2m+6}\left(\frac{b^2-a^2}{2}-2R^2\right)+R^{2m+8}\Big\}W^{1}_{2(m+2),6}=0;$$

3. $$2\sum_{m=1}^{11}(-1)^{\kappa+1}C_{m+1}^{m-\kappa}R^{2(m-\kappa-1)}W^{1}_{2m,0}+\frac{2}{R^2}W^{1}_{0,2\kappa}+$$

$$+\gamma_2\sum_{m=1}^{m+n=7}\sum_{n=1}(-1)^{n+1}\times$$

$$\times\left\{C_m^{\kappa-n+1}\frac{a^4}{16}\left(\frac{b^2}{4}-R^2\right)^2+C_{m+1}^{\kappa-n+1}R^2\left[\frac{a^4}{8}\left(\frac{b^2}{4}-R^2\right)-\frac{a^2}{2}\left(\frac{b^2}{4}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-R^2\right)^2\right]+C_{m+2}^{\kappa-n+1}R^4\left[\frac{a^4}{16}-a^2\left(\frac{b^2}{4}-R^2\right)+\left(\frac{b^2}{4}-R^2\right)^2\right]+$$

$$\left.+C_{m+3}^{\kappa-n+1}R^6\left(\frac{b^2-a^2}{2}-2R^2\right)+C_{m+4}^{\kappa-n+1}R^8\right\}R^{2(m+n-\kappa-1)}W_{2(m+2),2(n+2)}=$$

$$=0;$$

$\tau_{n\theta}=0$ при $r=R$.

4. $$\sum_{m=1}^{11}\left[\left(\frac{a^{2m}}{4^m}-R^{2m}\right)W^{1}_{2m,0}-\sum_{n=1}^{11}\frac{b^{2n}}{4^n}W^{1}_{0,2n}=0;\right.$$

5. $$(-1)^{\kappa-1}\sum_{m=1}^{11}R^{2(m-\kappa)}C_m^{m-\kappa}W^{1}_{2m,0}+W^{1}_{0,2\kappa}=0;$$

$\tau_{nz}=0$ при $r=R$;

6. $$\sum_{m=1}^{11}\left[\frac{1}{2m+1}\left(\frac{a^{2m}}{4^m}-R^{2m}\right)W^{11}_{2m,0}-2m\left(\frac{a^{2m-2}}{4^{m-1}}-R^{2m-2}\right)W_{2m,0}\right]=0;$$

7. $$\sum_{m=1}^{11}\left[\frac{m}{2m+1}R^{2m-2}W^{11}_{2m,0}-2m(m-1)R^{2m-4}W_{2m,0}\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{11}\left[\frac{1}{(2n+1)R^2}\frac{b^{2n}}{4^n}W^{11}_{0,2n}-\frac{2(n+1)}{R^2}\frac{b^{2n}}{4^n}W_{0,2n+2}\right]+$$

$$+\sum_{m=1}^{6}\frac{b^4}{8}R^{2m-2}\left[(m+1)\frac{a^4}{16}-(m+2)\frac{a^2R^2}{2}+(m+3)R^4\right]W_{2m+4,6}=0;$$

$$8.\quad (-1)^{к-1}\sum_{m=1}^{11}\left[C_{m+1}^{m-к}R^{2(m-к)}\frac{W_{2m,0}^{11}}{2m+1}-2mC_m^{m-к-1}R^{2(m-к-1)}\times\right.$$

$$\left.\times W_{2m,0}^{11}\right]+\frac{1}{2к+1}W_{0,2к}^{11}-2(к+1)W_{0,2к+2}+$$

$$+\sum_{m=1}^{m+n=7}\sum_{n=1}(-1)^{n+1}\left\{\frac{a^4}{8}\left(\frac{b^2}{4}-R^2\right)\left[(m+n)\left(\frac{b^2}{4}-R^2\right)-2R^2\right]C_m^{к-n+1}+\right.$$

$$+R^2\left[(m+n+1)\left(\frac{b^2}{4}-R^2\right)(a^2-b^2+4R^2)-a^2R^2+8R^2\left(\frac{b^2}{4}-R^2\right)\right]\frac{a^2}{4}C_{m+1}^{к-n+1}+$$

$$+R^4\left[(m+n+2)\left(\frac{a^4+b^4}{8}+2R^4-b^2R^2+2a^2R^2-\frac{a^2b^2}{2}\right)-4R^2\left(\frac{b^2}{4}-R^2\right)+\right.$$

$$\left.+2a^2R^2\right]C_{m+2}^{к-n+1}+R^6\left[(m+n+3)(b^2-a^2-4R^2)-4R^2\right]C_{m+3}^{к-n+1}+$$

$$\left.+2R^8(m+n+4)C_{m+4}^{к-n+1}\right\}R^{2(m+n-к-1)}W_{2m+4,2n+4}=0;$$

$к=1,2,\dots,11.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушевский А.Е., Севенюк А.З. Приближенное определение спектра частот продольных колебаний упругого параллелепипеда при точном выполнении краевых условий на его четырех гранях. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1978, вып. 5.

УДК 539.3

А.Е.Крушевский, О.Н.Скляр

ПОСТРОЕНИЕ СТРУКТУРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИЗГИБА УПРУГОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ПРИ ОТСУТСТВИИ НАГРУЗКИ НА ЧЕТЫРЕХ ГРАНЯХ

Построение структуры решения задачи изгиба для рядов аппроксимирующих функций любой степени имеет важное теоретическое и практическое значение, так как построенные ряды позволяют получать уточнение задачи с любой степенью точности [1].

Решение задачи строится следующим образом. Записываем ряды аппроксимирующих функций: