

д) так как во всех продольных направлениях стержней температурные напряжения σ_z растягивающие, то любая их комбинация с растягивающими напряжениями от механического нагружения является опасной.

Л и т е р а т у р а

1. Б у т к е в и ч Н.Н. Исследование напряженного состояния ковочных штампов с неоднородным термическим упрочнением. — Автореферат дис. ... канд. техн. наук. — Минск, 1972. — 25 с. 2. Метод фотоупругости. /Под общ. ред. Г.Л. Хесина. — М.: Стройиздат, 1975. Т. 1. — 275 с. 3. Ф р о х т М.М. Фотоупругость. — М.: Изд-во иностр. лит., 1948. Т. 1. — 450 с.

УДК 539.3

В.Н. Апанович, аспирант
(БПИ)

ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ О НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТРЕХМЕРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

В работе решение задач о нестационарных колебаниях упругих тел при динамическом нагружении предлагается производить на основе вариационного уравнения Лагранжа [1]

$$\int_V (\vec{K} - \rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}) \cdot \delta \vec{U} dV - \int_V T \cdot \delta E dV + \int_S \vec{F} \cdot \delta \vec{U} dS = 0, \quad (1)$$

где \vec{K} — вектор объемных сил; \vec{F} — вектор поверхностных сил; $\delta \vec{U}$ — вектор возможных перемещений; $T \cdot \delta E$ — бискалярное произведение тензора напряжений на тензор возможных деформаций; ρ — плотность материала.

Представим вектор упругих смещений тела в виде разложения по собственным формам колебаний

$$\vec{U}(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \vec{U}_i(x, y, z). \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) в уравнение (1) и используя условие ортогональности собственных форм $(\rho \vec{U}_i, \vec{U}_j)_V = 0, i \neq j$ и формулу Релея [2], получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 a_i}{dt^2} + \omega_i^2 a_i = \frac{(\vec{F}, \vec{U}_i)_S}{(\rho \vec{U}_i, \vec{U}_i)_V}, \quad i = 1, 2 \dots N. \quad (3)$$

Решение уравнений (3) при $t=0$ должно удовлетворять начальным условиям

$$a_i(0) = g_i; \quad \left. \frac{da_i}{dt} \right|_{t=0} = h_i. \quad (4)$$

Постоянные g_i и h_i определяем из соотношений [2]

$$g_i = \frac{(\rho \vec{U}_i, \vec{V}_1)_V}{(\rho \vec{U}_i, \vec{U}_i)_V} ; h_i = \frac{(\rho \vec{U}_i, \vec{U}_2)_V}{(\rho \vec{U}_i, \vec{U}_i)_V} ,$$

$$\text{где } \vec{V}_1(x, y, z) = \vec{U}(x, y, z) \Big|_{t=0} ; \vec{V}_2(x, y, z) = \frac{\partial \vec{U}(x, y, z)}{\partial t} \Big|_{t=0} .$$

Общее решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, запишем с использованием интеграла Дюамеля в виде

$$\vec{U}(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^N \left\{ g_i \cos \omega_i t + \frac{h_i}{\omega_i} \sin \omega_i t + \right. \tag{5}$$

$$\left. \frac{1}{\omega_i} \int_0^t \frac{(\vec{F}, \vec{U}_i)_S}{(\rho \vec{U}_i, \vec{U}_i)_V} \sin \omega_i (t - \tau) d\tau \right\} \vec{U}_i(x, y, z) .$$

В качестве примера по разработанной фортран-программе на ЭЦВМ ЕС-1022 решена тестовая задача о вынужденных нестационарных колебаниях параллелепипеда длиной 10 м с квадратным поперечным сечением со стороной квадрата $a = 1$ м. К параллелепипеду в точке А (рис. 1) мгновенно приложена и поддерживается постоянной в течение всего рассматриваемого промежутка времени продольная сила $F_x = 1$ Н. В расчете принято: модуль упругости $E = 2,04 \cdot 10^{11}$ Н/м²; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; $\rho = 7850$ кг/м³.

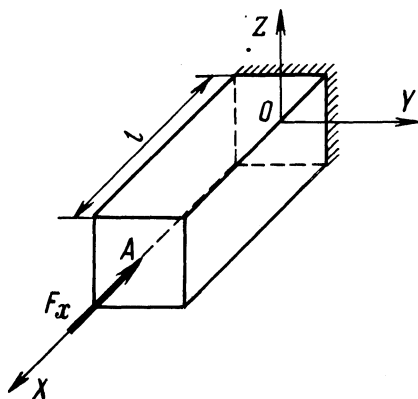


Рис. 1.

Разложение решения нестационарной динамической задачи произведено по трем нижшим собственным формам продольных колебаний параллелепипеда. Шаг по времени численного интегрирования уравнений движения принят равным $\Delta = 1 \cdot 10^{-5}$ с.

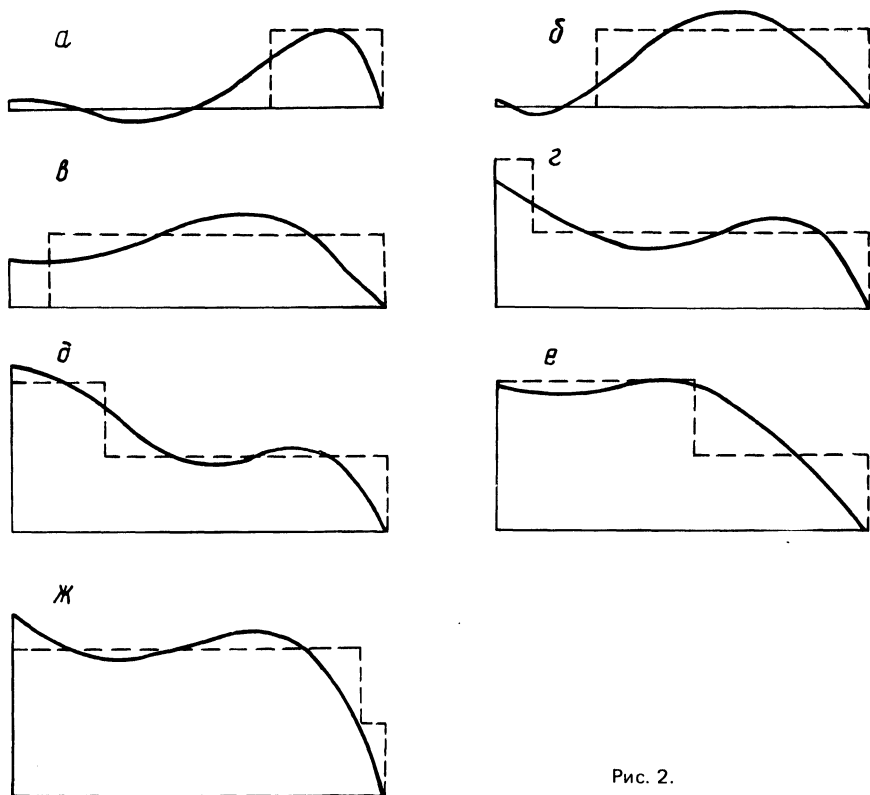
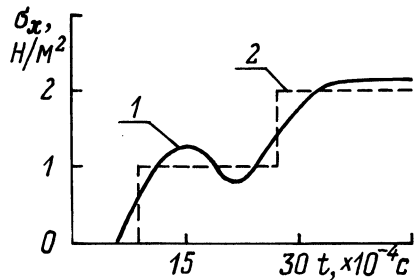


Рис. 2.

На рис. 2 приведены графики распределения напряжений σ_x по оси параллелепипеда для различных моментов времени. Сплошная линия соответствует решению (5), прерывистая — решению по элементарной теории распространения волн в стержнях. Графики рис. 2 отражают процесс распространения волны напряжений вдоль параллелепипеда и отражения волны от заданной грани. Из графиков видно, что полученное решение справедливо для части параллелепипеда, удаленной от точки приложения силы на расстояние (1,0–1,5) а.

На рис. 3 приведены графики изменения величины продольных напряжений σ_x в сечении, удаленном от точки приложения силы на расстояние 5а. Из графиков рис. 3 видно, что элементарная теория описывает распространение волны напряжений без дисперсии (без изменения формы волны), а решение задачи в трехмерной постановке — с дисперсией. Этим объясняется осцилляция напряжения относительно постоянных величин $\sigma_x = 1 \text{ Н/м}^2$ (прямая волна) и $\sigma_x = 2 \text{ Н/м}^2$ (отраженная волна), определяемых элементарной теорией. В отличие от решения по элементарной теории полученное решение предсказывает размытие фронта сильного разрыва. Форма размытого фрон-

Рис. 3.



та, изображенная на рис. 3, хорошо согласуется с формами, полученными при решении задач о распространении продольной волны в полубесконечном стержне по другим уточненным теориям [3]. Следует отметить, что, как в данном решении, так и в решениях, полученных другими исследователями [3], ордината первого максимума напряжений превышает высоту заданного скачка на 20–25% (рис. 3).

Л и т е р а т у р а

1. К р у ш е в с к и й А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. — Минск: Наука и техника, 1967. — 228 с. 2. Вибрации в технике: Справ. изд. В 6-и т. /Под общ. ред. В.В. Болотина. — М.: Машиностроение, 1978. Т. 1. — 352 с. 3. Г р и г о л ю к Э.И., С е л е з о в И.Г. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. — В кн.: Механика деформируемых тел. М.: ВИНТИ, 1973. — 273 с.

УДК 681.3.06:539.3

Л.П. Князева, инженер-программист (БГУ)

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В настоящей работе представлена структура и характеристика основных блоков комплекса программ, реализующего метод граничных интегральных уравнений решения смешанных задач теории упругости для упругого полупространства.

Несмотря на то, что к настоящему времени фонды алгоритмов и программ объединяют большое число программ, позволяющих решать разнообразные задачи математической физики, эффективность вычислительных экспериментов не может быть повышена без серьезного совершенствования математического обеспечения ЭВМ. Узкая специализация программ вызывает неизбежные повторы как программные, так и алгоритмические. Любая попытка видоизменения или расширения круга решаемых задач ведет к неизбежной переработке всей программы. Оперативное видоизменение вычислительной схемы в зависимости от постановки задачи возможно только с примене-