щений. Поэтому на этих частотах величина кинетической энергии короткого стержня в основном определяется поперечными движениями, а не продольными, как предполагается в классической теории. Этим и объясняется резкое уменьшение ω_2^{**} и ω_3^{**} по сравнению с ω_2 и ω_3 при $h/l > 0{,}4$.

Таким образом, решение задач о собственных колебаниях стержней в постановке трехмерной теории упругости с использованием разложения (1) позволяет учесть все факторы, которыми пренебрегает классическая теория (поперечные взаимодействия, инерция вращения, депланация сечений и др.) и которые в той или иной степени учитываются в уточненных теориях.

В рассмотренных примерах время расчета трех низших собственных частот на ЭЦВМ ЕС-1022 не превышало 5 мин. Результаты расчетов свидетельствуют об эффективности разработанной процедуры расчета собственных частот и форм свободных колебаний пространственных элементов конструкций.

Литература

1. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Механика твердых деформируемых тел: Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. — М.: ВИНИТИ, 1973. Т. 5. — 273 с. 2. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. — Минск: Наука и техника, 1967. — 228 с. 3. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. — М.: Высшая школа, 1972. — 416 с. 4. Dawson B. Rotery inertia and shear in beam vibration treated by the Ritz method. — Aeronaut. J., 1968, 72, N 688.

УДК 678.067.5:539.4

В.П. Ставров, канд. техн.наук, доцент
О.А. Кравченко, мл. научн. сотрудник
(ГГУ)

ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ В КОМПОНЕНТАХ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО СТЕКЛОПЛАСТИКА

Современные микромеханические теории разрушения композитных материалов основываются на предположении о неоднородном распределении деформаций и напряжений в компонентах [1—3]. Причиной неоднородного напряженного и деформированного состояния компонентов служит неоднородность микроструктуры композита. Различаются два фактора неоднородности микроструктуры [3]: присутствие разнородных по свойствам компонентов и случайный характер формы и расположения элементов структуры.

Для определения деформаций и напряжений в компонентах применяются детерминистические и статистические модели. Детерминистические модели позволяют исследовать влияние только первого фактора — наличие разнородных компонентов — при регулярном расположении элементов структуры. Результаты этого исследования содержатся в работах [2, 4—7]. Одно из важных

преимуществ статистических моделей состоит в принципиальной возможности учесть влияние и второго фактора. Однако такая возможность далеко не всегда реализуется [8]. При решении статистических задач механики микронеоднородных сред в моментных функциях утрачивается значительная часть информации о случайном поле структуры композита. В результате деформации и напряжения в компонентах оказываются либо детерминированными, либо (при других, менее жестких ограничениях, накладываемых на координатную зависимость моментных функций свойств) распределенными по закону, близкому к нормальному, независимо от макроскопического напряженного состояния и структуры композита. В ряде работ [8—11] распределения деформаций и напряжений в компонентах вычислялись без перехода к моментным функциям, при этом характеристики формы и расположения элементов структуры явно не вводились. Законы распределений деформаций и напряжений в компонентах также оказались близкими к нормальным. Аналогичный результат получен в эксперименте [12]. В то же время в книге [3] отмечается, что при некоторых видах структуры и напряженного состояния законы распределения параметров состояния компонентов отличаются от нормального, однако закономерности влияния структуры и напряженного состояния на характер распределения деформаций и напряжений в компонентах не установлены. В упомянутых работах не выяснено, в частности, каково раздельное влияние разброса размеров и случайного расположения элементов структуры на напряженное состояние компонентов, в каком соотношении находятся концентрации напряжений для композитов регулярной и случайной структуры и каким образом влияет макроскопическое напряженное состояние на поле деформаций и напряжений в компонентах. Исследованию этих эффектов, имеющих важное значение для управления структурой и свойствами композитного материала на стадии разработки, в частности для прогнозирования прочности на основе микромеханических теорий, посвящена данная статья. Числовые результаты получены для композитных материалов со структурой и свойствами, характерными для однонаправленных стеклопластиков, однако использованный при этом метод может быть применен и в более общих случаях.

Статистическая модель и характеристики напряженного и деформированного состояния материала. Однонаправленный стеклопластик моделируется системой круглых цилиндров, промежутки между которыми заполнены связующими. Структура модели вполне определяется диаметрами, расположением и относительной площадью кругов, представляющих собой сечение цилиндров плоскостью, перпендикулярной оси армирования (x_3). Структура модели называется регулярной, если круги расположены упорядоченно и имеют одинаковые или изменяющиеся по детерминированному закону диаметры. Наиболее исследованы модели регулярной структуры, в которой центры кругов расположены в узлах квадратной, гексагональной или другой двоякопериодической решетки [2, 4—7].

Структура модели называется случайной, если диаметры или координаты центров кругов являются случайными величинами. Общее описание статистической модели композитного материала дано в книге [3]. Поскольку все ве-

личины, определяющие структуру и свойства модели, заданы на множестве однотипных тел, то и при наличии регулярной структуры пригодна статистическая модель, если только координаты центров кругов в системе, связанной с телом, суть случайные величины. Средние значения случайных полей структуры, свойств и параметров состояния такой модели, взятые по множеству реализаций, сходятся к средним значениям по объему представительной реализации, хотя в целом условия эргодичности перечисленных случайных полей при наличии регулярной структуры не выполняются.

Пусть оба компонента обладают детерминированными упругими свойствами и изотропны. Модули упругости $\theta(x)$ статистической модели — случайные поля. Для определения случайных напряжений $\xi(x)$, деформаций $\varepsilon(x)$ и перемещений $\varkappa(x)$ при заданных на границе тела детерминированных условиях и при однородном или макроскопически гладком поле средних деформаций $e(x) = \langle \varepsilon(x) \rangle$ решается система интегродифференциальных уравнений относительно флуктуаций деформаций:

$$\varepsilon^{o} = \Phi \cdot\cdot e; \quad \Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i ; \quad \Phi_0 = 1; \tag{1.1}$$

$$\Phi_i(x) = \text{def} \int_V G(x, x') \cdot (\nabla \cdot \theta^{o} \cdot\cdot \Phi_{i-1})' \, dV',$$

где $G(x, x')$ — тензор Грина; θ^{o} — флуктуация модулей упругости.

Анализ методов решения системы уравнений (1.1) при вычислении макроскопических постоянных упругости композитных материалов, а также деформаций и напряжений содержится в книге [3] и в статьях [8–13]. В данной работе применяется метод, названный решением в реализациях [3,14].

Пусть имеется некоторая реализация случайного поля структуры $\lambda(x)$ и свойств $\theta(x)$, ей соответствует реализация $F_1(x)$ случайного функционала $\Phi_1(x)$. Согласно (1.1) она может быть получена интегрированием по координатам

$$F_1(x) = \text{def} \sum_{s=1}^{\infty} \int_V G(x, x') \cdot (\nabla \cdot R^{(s)} h^{(s)})' \, dV', \tag{1.2}$$

где $R^{(s)}$ — значение θ^{o} для элемента структуры с номером s ; $h^{(s)}(x)$ — индикатор множества точек элемента s.

Реализации последующих слагаемых ряда (1.1) находятся аналогично. В отличие от модулей упругости реализации поля $\Phi_1(x)$ не постоянны в области V_s, поэтому в выражения для реализаций функционала войдут слагаемые, содержащие производные по координатам. Их вычисление не представляет принципиальных затруднений, объем которых значительно возрастает. Для упрощения вычислений эти слагаемые далее не учитываются. Можно доказать, что вклад этих слагаемых невелик, если неоднородность поля деформаций внутри элемента структуры невелика по сравнению с различием деформаций в компонентах, а это характерно для композитных материалов, модули упругости которых отличаются не более чем на порядок.

Для однонаправленного волокнистого композита интегрирование в (1.2) по поверхностям, ограничивающим элементы структуры , заменяется интегрированием по контурам L_s-окружностям, ограничивающим сечение волокон в плоскости x_1x_2.

Компоненты F_{ijmn} тензора F (индекс 1 опущен) можно записать в виде:

$$F_{ijmn}(x) = \begin{cases} I^{I}_{ij\varphi a} C^{*}_{\varphi a mn}, & M(x) \in L^{I}; \\ I^{II}_{ij\varphi a} C^{*}_{\varphi a mn}, & M(x) \in L^{II}, \end{cases}$$

где

$$I^{I}_{ijmn} = \frac{1}{2}\left[(I^{(o)}_{ijmn} + I^{(o)}_{jimn})(1-P) - \sum_{k=1}^{\infty} (I^{(\kappa)}_{ijmn} + I^{(\kappa)}_{jimn}) \right]; \qquad (1.3)$$

$$I^{II}_{ijmn} = \frac{1}{2}\left[(I^{(o)}_{ijmn} + I^{(o)}_{jimn})(-P) - \sum_{k=1}^{\infty} (I^{(\kappa)}_{ijmn} + I^{(\kappa)}_{jimn}) \right];$$

$$I^{(\kappa)}_{ijmn}(x) = \int_{L^{I}_{k}} \frac{\partial G_{im}(\xi, x')}{\partial x_j} n_n^{(\kappa)} dL^{I}_{\kappa},$$

где $G_{ij}(x, x)$ — компоненты тензора Грина для однонаправленной среды с модулем упругости $C_{ijmn} = \langle \theta_{ijmn} \rangle$; L^{I}, L^{II} — подмножества точек, принадлежащих арматуре (I) и связующему (II); $C^{*}_{ijmn} = C^{I}_{ijmn} - C^{II}_{ijmn}$; C^{I}_{ijmn}, C^{II}_{ijmn} — модули упругости арматуры и связующего; P — относительное объемное содержание арматуры; L^{I}_{k} — окружность, ограничивающая круг к.

Если точка M(x) находится в некотором круге, то ему присваивается номер 0, а остальные номера (1,2,...) присваиваются в порядке возрастания расстояния от точки M(x) до центра круга. Интегралы $I^{(o)}_{ijmn}$ не зависят от положения центра круга относительно точки M(x) и от радиуса круга. Они совпадают и с интегралами, вычисленными ранее при решении задачи в моментных функциях [15]. Интегралы $I^{(\kappa)}_{ijmn}$ (κ = 1,2, ...) зависят от положения круга и его радиуса. Они описаны в книге [3].

Дальнейшие вычисления реализации функционала $\Phi_1(x)$ сводятся к нахождению сумм (1.3) для реализации поля структуры, т.е. при известных радиусах и координатах центров кругов. Поскольку рассматривается конкретная реализация структуры, то характер структуры (регулярная или случайная) не имеет принципиального значения.

По значениям F_{ijmn} в точках, выбранных случайным образом, вычисляются макроскопические модули упругости, деформации и напряжения в каждой точке, а по совокупности значений деформаций и напряжений

строятся законы распределения этих параметров как безусловные, так и условные.

Способ получения реализаций регулярной структуры не требует пояснений. Реализации случайной структуры могут быть заданы по микрошлифам технических материалов или построены на ЭВМ. В данной работе использовали алгоритм, предусматривающий последовательное заполнение заданного поля (единичного квадрата) кругами, диаметры которых распределены по нормальному закону с известными параметрами. Координаты очередного круга выбирали как реализации равномерно распределенных чисел до тех пор, пока не удовлетворялось условие непересечения круга с уже имеющимися. Каждая реализация содержала около 1000 кругов. Вычисления производили на ЭВМ "Минск-32" для двух типов регулярной структуры (с квадратной и гексагональной укладкой цилиндров одинакового диаметра) и для случайной структуры (0,45; 0,5 и 0,6) и с различным разбросом диаметров кругов (коэффициенты вариации 0; 5 и 13%). Упругие постоянные компонентов принимали равными: E^{I} = 70 ГПа, E^{II} = 3 ГПа, n^{I} = 0,2; n^{II} = 0,35 (E — модуль Юнга, n — коэффициент Пуассона).

Реализации функционала Φ_1 (x) случайных деформаций и напряжений в компонентах вычисляли в 400 точках, выбранных случайным образом внутри квадрата со стороной, равной примерно 1/4 от стороны основного квадрата. Для каждой точки суммы (1.3) вычисляли до такого значения к, начиная с которого значения сумм изменялись не более чем на 0,5% при увеличении расстояний до центра последнего круга (радиус суммирования) на d (d — средний диаметр круга). При P= 0,5 радиус суммирования составляет около 1,4 d , т.е. необходимо учесть слагаемые до к $\approx$100.

Значение радиуса суммирования характеризует размер области упругого взаимодействия элементов структуры. Радиус этой области на порядок больше радиуса статистической зависимости случайных полей структуры и свойств. Отсюда вытекает физический смысл ограниченности решений в моментных функциях.

В каждом случае находили макроскопические модули упругости. Имея в виду дальнейшее приложение результатов к оценке прочности компонентов и композита в целом, в каждой точке вычисляли не только все составляющие тензоров деформаций и напряжений в системе координат (x_i), связанной с осями симметрии структуры материалов, но и главные деформации и напряжения. Для безусловных, условных (в осях x_i) и главных деформаций и напряжений вычисляли параметры распределения (средние значения, средние квадратические отклонения, коэффициенты асимметрии и эксцесса), строили гистограммы распределения. Числовые результаты получены для 12 напряженных состояний, при которых значения составляющих тензора макроскопических напряжений равны (в условных единицах): 1) p_{11}= 1; 2) p_{11} = = –1; 3) p_{11}= 1; p_{22} = –1; 4) p_{33}= 1; 5) p_{33}= –1; 6) p_{11}= 1; p_{33}=–1; 7) p_{11} = – 1; p_{33}= 1; 8) p_{11}= p_{22} = 1; 9) p_{11}= p_{33}= 1; 10) p_{12}= 1; 11) p_{11}= = p_{22} = – 1; 12) p_{13} = 1. Остальные составляющие приняты равными нулю. Заметим, что программа составлена для произвольного напряженного сос-

тояния материала. Если значения F_{ijmn} уже вычислены, то для расчета распределений деформаций и напряжений в компонентах (включая построение гистограмм) при каждом напряженном состоянии достаточно машинного времени 5 мин. На построение реализации случайного поля структуры и вычисление значений F_{ijmn} в 400 точках затрачивается до 30 мин.

Результаты вычислений и их обсуждение. Как и следовало ожидать, на модуль Юнга в направлении армирования x_3 укладка волокон не влияет. Не влияет она и на коэффициент Пуассона n_{13}, характеризующий сокращение по оси x_1 при растяжении вдоль оси x_3. Более чувствительны к структуре модуль Юнга и коэффициент Пуассона в трансверсальной плоскости (для материала с квадратной упаковкой — в направлениях, параллельных сторонам квадрата). При гексагональной укладке волокон технические постоянные упругости близки к постоянным для материала со случайной структурой. Разброс диаметров волокон на упругие постоянные практически не влияет.

Технические постоянные упругости, вычисленные для материала со случайной структурой с учетом взаимного влияния волокон по изложенному методу, почти не отличаются от постоянных, вычисленных путем решения задач в моментных функциях [15] (в предположении их предельно локальной координатной зависимости). Близкими получились и средние значения деформаций и напряжений в компонентах, найденные по этим двух методам.

Моменты высших порядков и вид распределения деформаций и напряжений в компонентах (как в системе координат x_i, так и в главных осях) существенно зависят от структуры материала и от вида напряженного состояния. Гипотезу о нормальном распределении при не слишком больших уровнях значимости можно принять только при некоторых симметричных относительно оси x_3 напряженных состояниях.

Коэффициенты вариации наибольших главных деформаций в связующем равны нулю при растяжении вдоль оси x_3 и равномерном сжатии в трансверсальной плоскости. При сжатии вдоль оси армирования они не превышают 7%, при других напряженных состояниях достигают 30%. С увеличением содержания арматуры коэффициенты вариации наибольших главных деформаций и напряжений уменьшаются (рис. 1). От дисперсии диаметров волокон они практически не зависят. Коэффициенты вариации наибольших главных напряжений в компонентах в области содержаний арматуры 0,45—0,60 больше, чем коэффициенты вариации наибольших главных деформаций при тех же напряженных состояниях, однако с увеличением концентрации различие уменьшается. Коэффициенты вариации деформаций и напряжений в арматуре при растяжении вдоль оси x_1 больше, чем в связующем, примерно в 2 раза. Аналогичное соотношение получено при экспериментальном исследовании деформаций [12]. Вычисленные значения коэффициентов вариации близки к значениям, полученным в работе [12] для образцов II типа, однако вывод о незначимости различия дисперсий продольных и поперечных деформаций в арматуре и связующем не подтвердился.

Неоднородность полей деформаций и напряжений в компонентах при регулярной структуре оказалась не менее значительной, чем при случайной

структуре (и тех же содержаниях арматуры). Коэффициенты концентрации напряжений в связующем, найденные как отношение наибольшего главного напряжения к среднему значению, при растяжении вдоль оси x_1 и $P \approx 0{,}5$ составляют для регулярной структуры с квадратной укладкой 1,93, с гексагональной — 1,98, для случайной структуры при коэффициенте вариации диаметров 13%—2,03. Следовательно, коэффициенты концентрации напряжений довольно слабо зависят от укладки волокон. Средние значения наибольших главных напряжений в связующем сильнее зависят от укладки. При квадратной укладке они почти на 30% больше, чем при гексагональной, и на 40% больше, чем при случайной. Ни коэффициенты концентрации напряжений, ни средние напряжения в компонентах практически не зависят от разброса диаметров волокон.

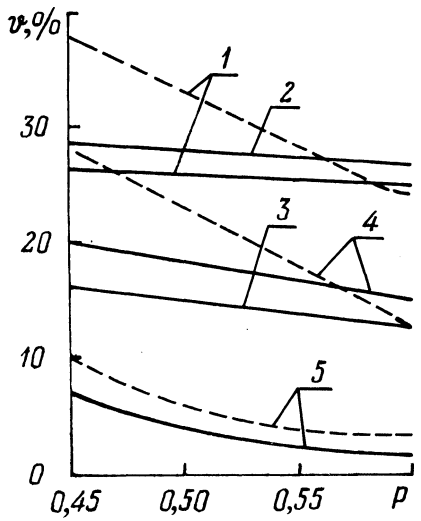

Рис. 1. Зависимость коэффициента вариации наибольших главных деформаций (сплошные линии) и напряжений (штриховые) в связующем от содержания арматуры при некоторых напряженных состояниях: 1 — $P_{11}=1$; 2 — $P_{11}=-1$, 3 — $P_{11}=P_{22}=1$; 4 — $P_{12}=1$; 5 — $P_{33}=-1$.

Близость распределения случайной величины к нормальному характеризуют, как известно, значения коэффициентов асимметрии и эксцесса. При объеме выборки n= 200 средние квадратические отклонения выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса равны соответственно 0,17 и 0,33. Для многих распределений напряжений и деформаций в компонентах, построенных по изложенному методу, значения коэффициентов асимметрии и эксцесса оказались значимыми.

Для главных деформаций и напряжений в связующем материале со случайной структурой коэффициент асимметрии, как правило, положительный, для деформаций и напряжений в арматуре – отрицательный. Выявился вполне определенный характер зависимости коэффициентов асимметрии и эксцесса от дисперсии диаметров волокон: с увеличением дисперсии диаметров волокон коэффициенты асимметрии и эксцесса наибольших главных деформаций и напряжений в связующем увеличиваются. Асимметрия распределе-

ния главных напряжений в связующем обычно меньше, чем асимметрия распределения главных деформаций.

При переходе к упорядоченной структуре коэффициенты асимметрии и эксцесса главных деформаций в связующем случае $p_{11}=1$ уменьшаются, принимая наименьшие (отрицательные) значения при квадратной укладке ($A\approx-1$, $E\approx-1{,}1$). При случайной укладке волокон для некоторых напряженных состояний минимальное значение коэффициента асимметрии главных деформаций и напряжений получено для $P=0{,}5$. Если напряженное состояние симметрично относительно оси x_3, то изменение коэффициентов асимметрии деформаций и напряжений при изменении P невелико.

Найденные в работе законы распределения деформаций и напряжений в компонентах позволяют построить поверхности равной микроповрежденности, названные в работе [4] начальными поверхностями прочности. Пусть микроповреждения в связующем появляются при достижении наибольшими главными деформациями значения $e^{II}_{*}=1{,}5\%$. По значениям микроскопических напряжений p^{*}_{ij}, при которых данное условие выполняется в 5% случайных точек, как по предельным напряжениям вычислены коэффициенты уравнения предельной поверхности Гольденблата – Копнова [16]

$$R_{\alpha\beta}p^{*}_{\alpha\beta}+(R_{\alpha\beta\gamma\delta}p^{*}_{\alpha\beta}p^{*}_{\gamma\delta})^{\frac{1}{2}}=1.$$

На рис. 2 показаны некоторые сечения таких поверхностей.

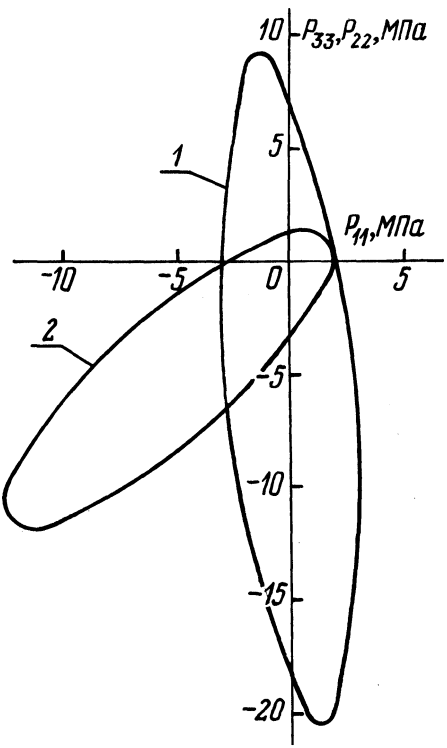

Рис. 2. Сечения поверхностей равной микроповрежденности однонаправленного стеклопластика (содержание арматуры 0,5; коэффициент вариации диаметров волокон 13%) при вероятности разрушения связующего 5%: 1 – $P_{33}=0$; 2 – $P_{22}=0$.

В работе [17] экспериментально установлено, что нижняя граница макроскопической деформации, при которой регистрируется начало микроповреждений в однонаправленном стеклопластике при растяжении перпендикулярно волокнам, практически не зависит от содержания волокон в диапазоне P от 0,20 до 0,65. Этот факт удовлетворительно объясняется установленными закономерностями распределения деформаций в компонентах. Вычисленные при указанных выше исходных данных значения деформаций e^{*}_{11}, при которых вероятность P_{*} того, что наибольшие главные деформации свя-

зующего превысят предельное значение, оказались постоянными относительно P. При $P_* = 0{,}05$ $e^*_{11} = 0{,}67 \cdot 10^{-3}$, что примерно соответствует нижней границе деформаций, при которой регистрируются первые микроповреждения.

Литература

1. Тамуж В.П., Куксенко В.С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. — Рига: Зинатне, 1978. — 294 с. 2. Чамис К. Микромеханические теории прочности. — В кн.: Композиционные материалы: Разрушение и усталость.М., 1978. Т. 5. с. 104—165. 3. Волков С.Д., Ставров В.П. Статистическая механика композитных материалов. — Минск: Вышэйшая школа, 1978. — 208 с. 4. Рикардс Р.Б., Чате А.К.Начальная поверхность прочности однонаправленно армированного композита при плоском напряженном состоянии.—Механика полимеров,1976,№4,с.633—639. 5. Ломакин В.А., Колтунов М.А. Действие армирующих элементов при растяжении на деформацию и прочность стеклопластиков. — Механика полимеров, 1965, № 2, с. 104—113. 6. Ван Фо Фы Г.А. Конструкции из армированных пластмасс. — Киев, 1971. — 220 с. 7. Сендецки Дж. Упругие свойства композитов. — В кн.: Композиционные материалы: Механика композиционных материалов. М.: Наука, 1978. Т. 2, с. 61—101. 8. Волков С.Д. Некоторые задачи статистической механики композитов. — Механика полимеров,1979,№5,с.893—899.9.Калягин М.Ф.,Волков С.Д. К теории распределения упругих деформаций в двухкомпонентных композитах. — Механика полимеров, 1973, № 4, с. 616—622. 10. Лапшина И.Ф., Мендельсон В.М., Волков С.Д. Распределение напряжений и деформаций в компонентах композитных материалов. — Проблемы прочности, 1974, № 12, с. 31—35. 11. Дружинина Т.В., Волков С.Д. Расчет напряжений в компонентах композитных материалов анизотропной структуры. — Механика полимеров, 1977, № 5, с. 827—831. 12. Ставров В.П., Титенок В.И. О законе распределения деформаций в композитных материалах. — Механика полимеров, 1974, № 4, с. 731—734. 13. Хорошун Л.П. Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных сред. — Прикладная механика, 1978, № 2, с. 3—17. 14. Ставров В.П. Метод функций Грина в статистической теории упругости. — В кн.: Вопросы естественных и технических наук: Материалы I научн.-метод . конф. 1972 г. Гомель, 1973, вып. II, с. 21. 15. Ставров В.П., Величко А.П. Начальные напряжения в армированных и наполненных полимерах. — Механика полимеров, 1973, № 1, с. 90—96. 16. Сопротивление стеклопластиков/В.Л. Бажанов, И.И. Гольденблат, В.А. Копнов и др. — М: Машиностроение, 1968. — 304 с. 17. Brintrup H. Beitrag zum Zeitabhängigen Verformungsverhalten und zur Riβbildung orthotrop glasfaserverstärkter ungesättigter Polyesterharzen unter ebener Normalbeanspruchung. — Dis. Aachen. 1975. — 228 s.