

А.Е. Крушевский, канд.техн.наук,
В.Н. Апанович, аспирант
(БПИ)

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЕЙ В ПОСТАНОВКЕ ТРЕХМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В основу классической теории изгибных и продольных колебаний стержней положены следующие допущения: плоские поперечные сечения стержня не искривляются при деформации оси стержня; напряжения в направлениях, перпендикулярных продольным волокнам, пренебрежимо малы. Таким образом, упругие поперечные взаимодействия не учитываются, а перемещения аппроксимируются линейными функциями поперечной координаты.

Решение многих практических задач на основе классических теорий не обеспечивает необходимой точности расчета. В связи с этим разработаны различные уточненные теории колебаний стержней, основанные на понижении размерности трехмерной задачи теории упругости [1].

В работе решение задач о собственных колебаниях стержней произведено в рамках трехмерной теории упругости. При этом амплитудное значение вектора смещений упругого тела разлагалось в ряд по полной системе $\{\vec{\varphi}_i(x, y, z)\}$ полиномиальных координатных функций

$$\vec{U}_0(x, y, z) = \sum_{i=1}^N a_i \vec{\varphi}_i(x, y, z), \quad (1)$$

где a_i – обобщенные перемещения.

После подстановки выражения вектора смещений тела

$$\vec{u}(x, y, z, t) = \vec{u}_0(x, y, z) \sin \omega t,$$

где ω – собственная частота колебаний в вариационное уравнение Лагранжа для полного объема [2] собственные формы и частоты колебаний определялись из матричного уравнения

$$(C - \omega^2 M) \vec{a} = 0, \quad (2)$$

где C – матрица обобщенной жесткости тела; M – матрица обобщенных инерционных сил; \vec{a} – вектор обобщенных перемещений. Для решения уравнения (2) использовался метод последовательных приближений [3].

Представим результаты анализа собственных колебаний консольных стержней, полученные на ЭЦВМ ЕС-1022.

Размеры стержней: сторона квадрата поперечного сечения $h=1$ м; длина стержня $l=1,0; 1,5; 3,0; 5,0$ и $10,0$ м. Характеристики материала стержней: модуль упругости $E = 2,04 \cdot 10^{11}$ Н/м²; коэффициент Пуассона $\nu=0,3$; плотность $\rho = 7,85 \cdot 10^3$ кг/м³.

Поперечные колебания стержней. Рассмотрим собственные поперечные колебания консольного стержня в плоскости ХОZ (рис. 1). Разложение вектора смещений в обычный степенной ряд имеет вид

$$\left. \begin{aligned}
 u &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^p a_{i+1,2j,2k+1} x^{i+1} y^{2j} z^{2k+1}; \\
 v &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^p a_{i+1,2j+1,2k+1} x^{i+1} y^{2j+1} z^{2k+1}; \\
 w &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^p a_{i+1,2j,2k} x^{i+1} y^{2j} z^{2k}.
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

При этом сумма показателей степеней в мономах $x^i y^j z^k$ не должна превышать n_{\max} , т.е. $i + j + k \leq n_{\max}$.

Расчет собственных частот и форм колебаний выполнен для $n_{\max} = 5$ и двух видов аппроксимации перемещений:

1. $m = 5, n = p = 1$, количество членов в разложении (3) $N = 12$. В этом случае зависимость перемещений по поперечным координатам Y и Z принята линейной, а по координате X перемещения аппроксимированы полиномом пятой степени. Такая аппроксимация перемещений соответствует принятию гипотезы плоских сечений, однако в отличие от классической постановки задачи все компоненты тензора напряжений (и деформаций) трехмерной теории упругости принимаются не равными нулю.

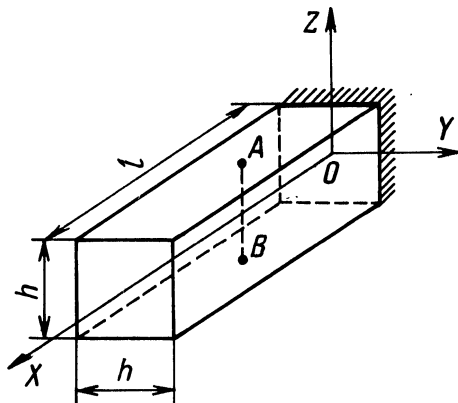


Рис. 1. Расчетная схема консольного стержня.

2. $m = n = p = 5, N = 27$ — перемещения по всем координатам аппроксимируются полиномами пятой степени.

Результаты расчета собственных частот поперечных колебаний стержней представлены в табл. 1, где l — длина стержня; i — номер частоты; ω, ω^* — собственные частоты, вычисленные по классической теории и по теории трех-

Таблица 1

l, м	i	ω , рад/с	ω^* , рад/с	ω^{**} , рад/с	$\frac{\omega^{**}}{\omega}$
10	1	51,73	56,14	53,04	1,025
	2	324,2	340,7	324,6	1,001
	3	908,0	909,5	879,0	0,968
5	1	206,9	219,8	207,7	1,004
	2	1297	1191	1138	0,878
	3	3632	2861	2767	0,762
3	1	574,8	582,1	549,8	0,956
	2	3602	2653	2542	0,706
	3	10088	5821	5654	0,560
1,5	1	2299	—	1855	0,807
	2	14410	—	6070	0,421
	3	40355	—	11982	0,297
1	1	5173	3651	3461	0,669
	2	32424	9587	9132	0,282
	3	90800	17019	14278	0,157

мерной динамической задачи теории упругости при $m = 5$, $n = p = 1$ и $m = n = p = 5$ соответственно.

На рис. 2 показаны графики зависимостей $\frac{\omega^{**}}{\omega}$; $\frac{\omega^T}{\omega} = f(h/e)$ для трех низших собственных частот, где ω^T — собственные частоты консольной балки, полученные в работе [4] путем решения уравнений изгибных колебаний

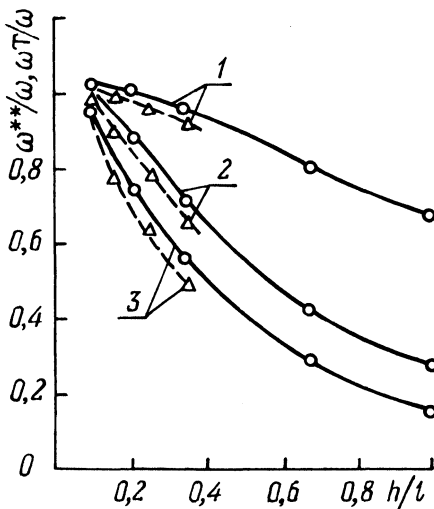


Рис.2. Графики зависимостей $\frac{\omega^{**}}{\omega}$; $\frac{\omega^T}{\omega} = f(h/l)$: 1,2,3 — первая, вторая и третья собственные частоты соответственно; сплошные линии — $\frac{\omega^{**}}{\omega}$; штриховые — $\frac{\omega^T}{\omega}$.

стержня по теории С.П. Тимошенко. Анализ данных табл. 1 и графиков рис. 2 показывает следующее:

расчетные значения низших собственных частот поперечных колебаний консольных стержней, полученные в результате решения трехмерной динамической задачи теории упругости, меньше соответствующих значений частот, полученных с использованием классической теории;

для стержней с $h/l = 0,5-1,0$ значения первой собственной частоты ω^{**} на 15–35% меньше значений частот ω , вычисленных по классической теории. С увеличением длины стержня разность между величинами ω^{**} и ω уменьшается;

для длинных стержней различия в расчетных значениях ω^{**} и ω трех низших собственных частот незначительны и составляют менее 5%;

с увеличением порядкового номера частоты разность между величинами ω^{**} и ω возрастает;

аппроксимация перемещений по всем осям полиномами пятой степени ($m = n = p = 5$) приводит к незначительному уменьшению расчетных значений собственных частот в сравнении с линейной аппроксимацией по поперечным координатам ($m = 5, n = p = 1$). Разность величин ω^{**} и ω не превышает 5%;

результаты решения задачи в трехмерной постановке (при $h/l = 0,1-0,33$) хорошо согласуются с результатами, полученными решением уравнений С.П. Тимошенко для консольной балки методом Ритца [4].

Для стержня $l = 10$ м определялись также значения собственных частот при $m = 5, n = 1, p = 5$, т.е. когда перемещения по координатам X и Z аппроксимируются полиномами пятой степени, а по координате Y – линейны. Расчеты показали, что различие значений собственных частот, вычисленных при такой аппроксимации и аппроксимации с $m = n = p = 5$, не превышает 1%. Таким образом, для длинных стержней увеличение степени аппроксимации по поперечной координате Y приводит к незначительному уточнению расчета.

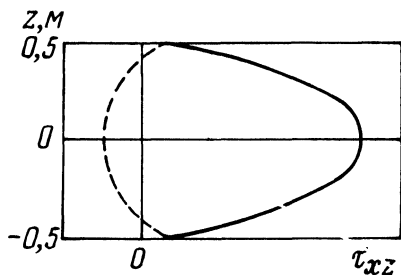


Рис. 3. Распределение касательных напряжений τ_{xz} по высоте стержня для второй собственной формы колебаний: сплошная линия – $l = 10,0$ м; штриховая – $l = 5,0$ м.

На рис. 3 для второй формы колебаний показано распределение касательных напряжений τ_{xz} по линии АВ (рис. 1). Поскольку формы колебаний определены с точностью до постоянного множителя, то абсолютные значения τ_{xz} не указаны. Из графиков рис. 3 видно, что наибольшая величина касательных напряжений имеет место на нейтральной оси. Это соответствует основным положениям теории изгиба стержней. На поверхности балки мак-

симальная величина нормальных напряжений σ_x от изгиба на порядок превосходит значения тех компонентов напряжений, которые должны обращаться в ноль (например, в точке А для первой формы колебаний $\sigma_x = 2,46; \sigma_y = 0,493; \sigma_z = 0,291; \tau_{xy} = 0,000; \tau_{xz} = -0,262; \tau_{yz} = 0,000$). Следовательно, интегральное условие отсутствия поверхностных нагрузок выполняется удовлетворительно.

Продольные колебания стержней. При продольных колебаниях стержня вектор смещений аппроксимируем рядом

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^p a_{i+1,2j,2k} x^{i+1} y^{2j} z^{2k}; \\ v &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^p a_{i+1,2j+1,2k} x^{i+1} y^{2j+1} z^{2k}; \\ w &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^p a_{i+1,2j,2k+1} x^{i+1} y^{2j} z^{2k+1}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Как и в предыдущем случае должно соблюдаться условие $i+j+k \leq n_{\max}$. При $n_{\max} = 5, m = 5, n = p = 1$ количество членов в разложении (4) $N = 12$, при $m = n = p = 5 \quad N = 24$.

Таблица 2

l, m	i	$\omega,$ рад/с	$\omega^*,$ рад/с	$\omega^{**},$ рад/с	$\frac{\omega^{**}}{\omega}$
10	1	801	809	809	1,010
	2	2402	2423	2427	1,010
	3	4004	4116	4093	1,022
5	1	1602	1619	1620	1,011
	2	4804	4842	4836	1,006
	3	8007	8194	8082	1,009
3	1	2669	2703	2704	1,013
	2	8007	8036	7980	0,996
	3	13346	13522	13001	0,974
1,5	1	5338	—	5437	1,018
	2	16015	—	13165	0,822
	3	26693	—	14920	0,559
1	1	8007	8231	8189	1,023
	2	24022	16264	13987	0,582
	3	40037	20440	15602	0,389

В табл. 2 приведены результаты расчета собственных частот продольных колебаний консольных стержней различной длины. Обозначения табл. 2 соответствуют обозначениям табл. 1.

На рис. 4 показаны графики зависимости $\frac{\omega^{**}}{\omega} = f(h/l)$ для трех низших частот продольных колебаний консольных стержней. Анализ графиков рис. 4 показывает, что значения первой собственной частоты, вычисленные по классической теории, практически совпадают с соответствующими значениями частоты, полученными при решении трехмерной задачи теории упругости как при линейной ($m = 5, n = p = 1$), так и при нелинейной ($m = n = p = 5$) аппроксимациях перемещений по поперечным координатам Y и Z . Следовательно, для рассматриваемого диапазона изменения отношения h/l при определении первой собственной частоты инерцией поперечных движений стержня, деформацией поперечного сечения и неравномерностью распределения продольных напряжений σ_x по сечению стержня можно пренебречь.

Для второй и третьей собственных частот хорошее совпадение ω и ω^{**} имеет место при $h/l < 0,4$. При $h/l > 0,4$ с увеличением h/l значения ω_2^{**} и ω_3^{**} резко уменьшаются по сравнению с ω_2 и ω_3 .

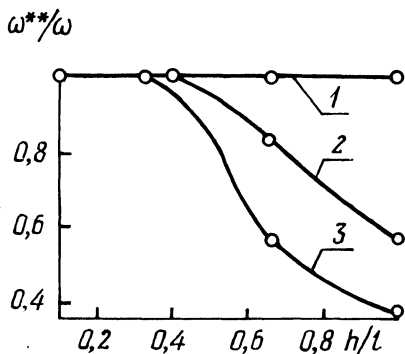


Рис. 4. Графики зависимости $\frac{\omega^{**}}{\omega} = f(h/l)$ для свободных продольных колебаний стержней: 1,2,3 — первая, вторая, третья собственные частоты соответственно.

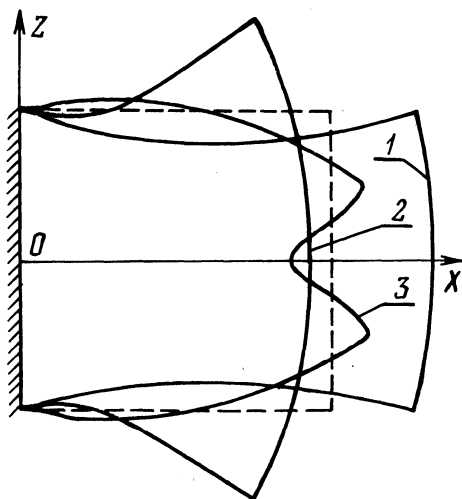


Рис. 5. Формы продольных колебаний куба (краткого стержня $l = 1$ м): 1,2,3 — первая, вторая и третья формы соответственно.

На рис. 5 изображены формы продольного сечения плоскостью XOZ стержня длиной 1 м, соответствующие трем нижшим собственным частотам. Из рис. 5 видно, что для второй и третьей собственных форм имеют место значительные искажения плоских поперечных сечений, при этом амплитуды поперечных перемещений преобладают над амплитудами продольных переме-

щений. Поэтому на этих частотах величина кинетической энергии короткого стержня в основном определяется поперечными движениями, а не продольными, как предполагается в классической теории. Этим и объясняется резкое уменьшение ω_2 и ω_3^* по сравнению с ω_2 и ω_3 при $h/l > 0,4$.

Таким образом, решение задач о собственных колебаниях стержней в постановке трехмерной теории упругости с использованием разложения (1) позволяет учесть все факторы, которыми пренебрегает классическая теория (поперечные взаимодействия, инерция вращения, деформация сечений и др.) и которые в той или иной степени учитываются в уточненных теориях.

В рассмотренных примерах время расчета трех низших собственных частот на ЭЦВМ ЕС-1022 не превышало 5 мин. Результаты расчетов свидетельствуют об эффективности разработанной процедуры расчета собственных частот и форм свободных колебаний пространственных элементов конструкций.

Л и т е р а т у р а

1. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Механика твердых деформируемых тел: Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. — М.: ВИНТИ, 1973. Т. 5. — 273 с.
2. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. — Минск: Наука и техника, 1967. — 228 с.
3. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. — М.: Высшая школа, 1972. — 416 с.
4. Dawson B. Rotary inertia and shear in beam vibration treated by the Ritz method. — Aeronaut. J., 1968, 72, N 688.

УДК 678.067.5:539.4

В.П. Ставров, канд. техн.наук, доцент
О.А. Кравченко, мл. научн. сотрудник
(ГГУ)

ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ В КОМПОНЕНТАХ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО СТЕКЛОПЛАСТИКА

Современные микромеханические теории разрушения композитных материалов основываются на предположении о неоднородном распределении деформаций и напряжений в компонентах [1–3]. Причиной неоднородного напряженного и деформированного состояния компонентов служит неоднородность микроструктуры композита. Различаются два фактора неоднородности микроструктуры [3]: присутствие разнородных по свойствам компонентов и случайный характер формы и расположения элементов структуры.

Для определения деформаций и напряжений в компонентах применяются детерминистические и статистические модели. Детерминистические модели позволяют исследовать влияние только первого фактора — наличие разнородных компонентов — при регулярном расположении элементов структуры. Результаты этого исследования содержатся в работах [2, 4–7]. Одно из важных