УДК 531.3 + 629.11.012.5

М.А. Левин канд.техн.наук, доцент
(БПИ)

РАЗВИТИЕ И ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ КАЧЕНИЯ К ДИНАМИКЕ СИСТЕМ С ДЕФОРМИРУЕМЫМ КОЛЕСОМ

Под теорией качения понимается совокупность зависимостей для силовых и моментных составляющих реакции в области контакта с опорной поверхностью (в общем случае деформируемой) в функции закона движения жесткого диска колеса, имеющего в общем случае деформируемую периферию. К теории качения относятся также теоретические и экспериментальные методы установления указанных зависимостей и их использование в динамике различных систем.

Ниже рассмотрен комплекс работ автора в области теории качения. Показана, в частности, роль ширины области контакта колеса, дан пример определения всех параметров шины, исходя из минимально необходимого количества экспериментальных, а также пример результатов применения теории к анализу колебаний управляемых колес.

Наиболее значительные результаты в области теории нестационарного качения представлены в публикациях Картера, Рокара, Фромма, Келдыша, Грейдануса, Неймарка и Фуфаева, Шлиппе и Дейтриха, Смайля, Сиджела, Пацейка, Кларка, Гоздека и др. Характерной особенностью большинства публикаций по нестационарному качению, в том числе и многих, появившихся после 1969 г., было рассмотрение не всех составляющих реакции опорной поверхности, использование большого количества различных гипотез, позволяющих уйти от изучения механизма взаимодействия элементов деформируемой периферии колеса с опорной поверхностью в нестационарном случае, а также пренебрежение в большинстве случаев влиянием ширины области контакта (для очень простой модели ширина учитывалась упрощенно Шлиппе и Дейтрихом и Пацейка). Отметим также практическое отсутствие работ по экспериментальному изучению нестационарного качения частотными методами к 1969 г., так как к этому времени в зарубежной литературе упоминались только два экспериментальных результата, принадлежащих Липману и Саито. Большие трудности возникали и в определении коэффициентов, входящих в различные теории качения. Все сказанное привело к необходимости провести комплекс исследований по следующим направлениям. I. Разработка теории нестационарного качения с учетом всех шести составляющих реакции связи и ширины области контакта при пренебрежимо малом проскальзывании в области контакта, принимая во внимание шесть степеней свободы жесткого диска колеса. Исследование качения с учетом проскальзывания при меньшем числе составляющих реакции и в стационарном случае также. Анализ точности различных теорий качения. II. Разработка метода и соответствующих программ для определения всех коэффициентов, входящих в теорию качения (параметров шины), исходя из минимально необходимого количества экспериментальных. III. Разработка экспериментальных методов получения час-

тотных характеристик деформируемого колеса, реализация конкретных испытательных стендов и проведение экспериментов. IV. Применение разработанной теории к исследованию динамики различных систем с качением, например, управляемых колес трактора, системы "двигатель—трансмиссия—колесо", самоустанавливающегося колеса самолета и автомобиля.

I. **Развитие теории качения деформируемого колеса.** Наиболее общий результат автора представлен в работах [14, 15, 25]. Этому предшествовали публикации [1,2], в которых найдены выражения для боковой силы и стабилизирующего момента в случае простейшего деформируемого колеса в квазикоординатах при каких угодно больших перемещениях. Получены также выражения для продольных деформаций в области контакта. Дан вывод уравнений для реакций связи в случае нестационарного движения с учетом двух зон скольжения для более сложной модели. В стационарном движении определен максимальный угол увода. Сделан анализ точности теории Рокара.

Получены выражения [3] для реакций связи катящегося колеса с учетом двух зон скольжения, когда срединная плоскость имеет не только боковое, но и угловое перемещение. Эти выражения оказываются нелинейными с запаздывающим аргументом, который является функцией, подлежащей определению. В случае пренебрежимо малого проскальзывания следуют линейные уравнения и соответствующие передаточные функции. Что касается линейных уравнений, то они имеют более компактную форму в сравнении с работой Сиджела и получены независимо от этой работы.

Деформируемая периферия в виде набора стержней, соединенных нитью, более подробно рассмотрена в докладе [6], кратким изложением которого является работа [8]. Приведены алгоритм и результаты вычислений на ЭВМ безразмерных величин боковой силы, стабилизирующего момента и зон скольжения в функции безразмерного угла увода. Построены частотные характеристики для боковой силы и стабилизирующего момента. Из условия совпадения с частотными характеристиками по теории Келдыша при малых значениях кинематической частоты найдены выражения для коэффициентов, входящих в теорию Келдыша. Разработана также программа по определению коэффициентов, входящих в указанную теорию, основывающаяся на минимизации квадратического отклонения комплексных передаточных коэффициентов. Показано, что выбор области изменения кинематической частоты существенно влияет на результаты. Указывается, что такое же положение должно возникнуть и при использовании данных эксперимента. В докладе [6] были даны ответы на некоторые вопросы, связанные с экспериментальным определением частотных характеристик.

Качение колеса в своей срединной плоскости рассмотрено в работе [5]. Найдено выражение для продольной реакции связи и вертикальной нагрузки, в то время как деформируемая периферия характеризуется радиальной и тангенциальной жесткостями. Более сложная деформируемая периферия рассмотрена в работе [7]. Установлена аналогия между выражениями для тангенциальной и боковой сил. Опираясь на эту аналогию, получено выражение для передаточной функции тангенциальной (продольной) силы и зависимость ее от тангенциального псевдоскольжения в стационарном случае.

Одновременное рассмотрение в квазикоординатах продольных и боковых сил для колеса с простейшей деформируемой периферией сделано в работе [9]. При этом, опираясь на аналогию между боковой и продольной силами, теория Келдыша обобщена на случай качения колеса в своей срединной плоскости. Приведены выражения для коэффициентов также и для более сложной периферии колеса, включающей нить с известной жесткостью на растяжение и натяжением. Найдено выражение для силы трения качения.

Нестационарное качение деформируемого колеса, когда учитывается также и жесткость протектора, рассмотрено в работе [13]. Приведены соответствующие передаточные функции, когда проскальзывание пренебрежимо мало. Результаты для безразмерных величин представлены в виде таблиц, полученных с использованием ЭВМ. Стационарные характеристики с учетом проскальзывания даны в работе [11] в виде таблиц для безразмерных боковой силы, стабилизирующего момента и двух зон проскальзывания в функции безразмерного угла увода и параметров периферии. Решение задачи реализовано в виде программы для ЭВМ. Получено соотношение, являющееся обобщением аналогичного выражения в работе [1] и позволяющее найти максимальный угол увода. Показано, как эти результаты могут быть распространены на случай качения колеса в своей срединной плоскости.

Наиболее общий результат представлен в работах [10, 14, 15, 25]. Рассматривается катящееся деформируемое колесо при пренебрежимо малом проскальзывании в области контакта, представляемое посредством жесткого диска с деформируемой периферией, которая имеет вид системы наборов стержней, соединенных растяжимыми и предварительно натянутыми нитями, хотя, конечно, можно было бы ввести формальное описание периферии с использованием дифференциальных операторов без упоминания каких-либо стержней и нитей. Деформируемая периферия характеризуется тремя геометрическими параметрами (радиус, длина и ширина области контакта) и пятью жесткостными (жесткости на единицу длины периферии: продольная, боковая и радиальная, а также натяжение нитей и их жесткость). Кроме того, для учета диссипации энергии в свободном режиме качения имеет смысл ввести момент трения качения в этом режиме, являющийся девятым параметром. Существенным является учет больших деформаций в области контакта. При этом найдены выражения, называемые основным или первым вариантом, для главного вектора и главного момента распределенных сил реакции опорной плоскости в процессе качения колеса при заданном законе движения его жесткого диска, имеющего шесть степеней свободы. Этот результат доложен на семинаре Института проблем механики [14]. Краткое изложение дано в работе [15], а подробное — в [25]. Результат, связанный с более простой математической обработкой модели периферии колеса, изложен в работе [10]. По методу Неймарка и Фуфаева построены еще три варианта выражений для реакций связи более низкого порядка. Дано обобщение теории Келдыша (второй вариант). Установлена связь с теорией Гоздека (третий вариант) и Картера—Рокара (четвертый и пятый варианты). Вычислены коэффициенты, входящие в теории различных вариантов, через основные восемь базовых параметров. Коэффициенты определялись, исходя из совпадения

7 Зак. 5198

частотных характеристик основного варианта и других вариантов в наиболее важной области малых и больших значений кинематической частоты. Подробно эта процедура описана в работе [18]. Частотные характеристики для реакций связи в соответствии с различными вариантами теории качения представлены в работе [24]. Они наглядно позволяют сравнить точность различных теорий.

Обратим внимание на важность учета ширины области контакта. Это обстоятельство может привести к существенно иным заключениям при рассмотрении динамики систем с качением. В качестве примера приведем диаграмму устойчивости системы самоустанавливающегося колеса (рис. 1) с использованием второго варианта теории и обозначений работы [15]. При этом $\rho = J v^2 s_4/f_{11}$; $\xi = e\mu_1$; $\mu_1 = s_4/s_5$; $L_1 = f_1 b^2 \mu_1^2 / f_2$; $L_2 = f_{11}\mu_1^2 / f_2$; $s_1 = s_4$; $s_2 = s_5$; J — момент инерции стойки относительно оси поворота; e — вынос колеса; 2b — ширина области контакта.

На рис. 1 штриховка обращена в сторону областей устойчивости. Отметим, таким образом, что уже при $L_1 = 0{,}423$ в области $0 < \xi \leqslant 1$ наблюдается устойчивость для всех значений ρ.

Укажем далее, что уточненные значения кинематических коэффициентов найдены в работе [27], принимая во внимание нелинейность дифференциальных уравнений, описывающих деформации за пределами области контакта.

В работе [21] предложены соотношения, позволяющие учесть проскальзывание и большие силы введением переменных коэфффициентов вместо постоянных в выражения линейной теории. Эффективность такого подхода продемонстрирована на примере лучшего совпадения с данными эксперимента при решении задачи о колебаниях в системе "двигатель — трансмиссия — колесо".

В работе [31] рассматривается простейшая модель деформируемого колеса, являющаяся частным случаем, изученной в [15], с удержанием коэффициентов порядка куба контактного угла перед малыми отклонениями, что позволило повысить точность анализа и сделать ее точно такой же и даже большей, чем в работе [5]. Показано, что зависимости в случае стационарного качения хорошо согласуются с известными опытными данными.

Заметим также, что подход, развитый для анализа динамики катящегося деформируемого колеса, оказался полезным при рассмотрении динамики движения нити по шкиву [28].

Систематическое использование автором моделей со стержневыми элементами связано с вообще доказанной эффективностью подобных представлений в механике деформируемого тела [33–36]. Заметим, что в процессе качения колеса вступают в контакт и выходят из контакта все время новые элементы периферии. Таким образом, мы имеем задачу с переменными связями и соответствующий математический аппарат, близкий к рассмотренному в работах [37–40].

II. **Определение коэффициентов, входящих в теорию качения.** Рассматривая параметры реальной шины, исходим из того, что уравнения, найденные, например, в работе [15] для определенной модели деформируемой перифе-

рии, справедливы и для других моделей и описывают в главном также и реальную шину. В последнем случае базовые параметры модели следует рассматривать лишь как некоторые приведенные величины, к которым приводится реальная шина. Действительно, анализируя модели различной сложности, мы всегда приходим, например, к уравнениям теории Келдыша с коэффициентами, зависящими от параметров модели. Аналогичное положение существует и в механике сплошных сред. Например, одной и той же анизотропии в теории упругости соответствует множество стержневых моделей [33–36].

Учитывая сложность практического применения громоздких моделей шин в динамике систем с качением и принимая во внимание необходимость учитывать все шесть составляющих реакции связи, имеет смысл использовать модели только с необходимо минимальным количеством параметров, каковыми и являются восемь указанных базовых с добавлением независимо определяемого девятого параметра. Поэтому, имея в виду реальную шину, были предложены следующие методы нахождения параметров деформируемого колеса (шины).

В работе [6] даны формулы для определения коэффициентов в теории Келдыша по известным значениям длины области контакта, боковой жесткости и коэффициента увода.

Наибольший практический интерес представляет определение всех коэффициентов, входящих в теорию качения по восьми экспериментальным значениям, среди которых радиус, длина области контакта (или контактный угол), продольная, боковая и угловая жесткости, коэффициенты тангенциального и бокового псевдоскольжений и нагрузка на колесо с шиной. Эти экспериментальные значения позволяют найти все восемь базовых параметров деформируемой периферии, а по ним и все остальные коэффициенты в теории качения. Алгоритм соответствующей программы расчета на ЭВМ описан в работе [26]. Очевидно, что нетрудно заменить какое-либо экспериментальное значение, взяв, например, вместо угловой жесткости коэффи-

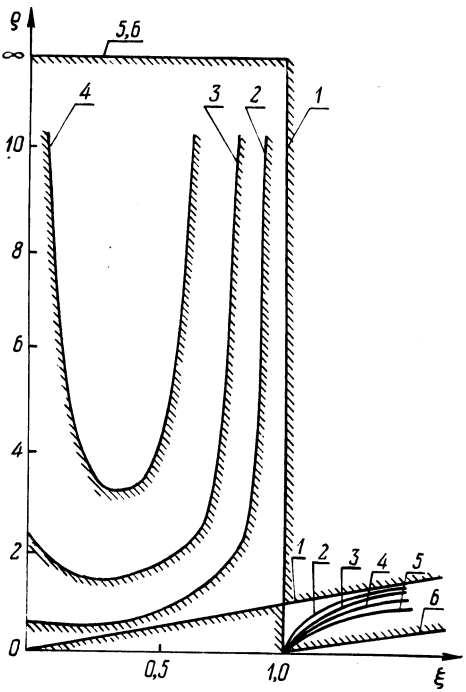

Рис. 1. Диаграмма устойчивости при $L_2 = 0,3$ (кривая 1 – $L_1 = 0$, $b = 0$ (теория Келдыша); 2 – $L_1 = 0,106$; 3 – $L_1 = 0,211$; 4 – $L_1 = 0,317$; 5 – $L_1 = 0,423$; 6 – $L_1 = \infty$).

циент увода по стабилизирующему моменту с соответствующими изменениями в алгоритме.

Уточнение выражений для кинематических коэффициентов, основанное на рассмотрении больших деформаций за пределами области контакта с удержанием членов порядка контактного угла до третьей степени включительно, позволило усовершенствовать алгоритм определения коэффициентов, входящих в теорию качения, по восьми экспериментальным значениям (см. работу [27]). Соответствующая программа составлена на Фортране и имеет объем порядка 600 карт. Для увеличения точности разумно вместо статических значений продольной, угловой и боковой жесткостей использовать их эффективные значения, которые могут быть определены по экспериментальным частотным характеристикам или, что еще проще, в результате испытаний с весьма малой скоростью движения, когда значение кинематической частоты достаточно велико, но не равно бесконечности, и, таким образом, трение скольжения имеет место в отличие от трения покоя при статических испытаниях. Пример результатов вычислений по этой программе представлен в табл. 1.

III. **Разработка экспериментальных методов исследования.** С целью экспериментальной проверки полученных теоретических зависимостей, описывающих реакции связи, были созданы соответствующие методики и экспериментальные стенды.

а) Определение экспериментальных частотных характеристик при боковом уводе.

Первые зарубежные результаты в этой области, относящиеся к реальным шинам, стали привлекать широкое внимание в СССР к 1975 г. , а соответствующие зарубежные методики стали известны еще позднее. В связи с тем, что экспериментальные работы в БПИ были начаты независимо и во многих случаях ранее аналогичных зарубежных (например, что касается частотных характеристик при боковом перемещении) или шли параллельно во времени, имеет смысл кратко остановиться на истории постановки эксперимента в БПИ по этой проблеме.

Методика эксперимента и принципиальная схема стенда для исследования частотных характеристик боковой силы и стабилизирующего момента при боковом и вращательном относительном движении шины были доложены автором на заседании кафедры "Автомобили" БПИ 04.11.1969 г., которое проходило под руководством заведующего кафедры д-ра техн.наук., проф., члена-корреспондента АН БССР И.С. Цитовича. Экспериментальный стенд был рекомендован к изготовлению на МАЗе, а руководителем от кафедры "Автомобили" был утвержден д-р техн.наук, проф. Ю.Б. Беленький при предполагавшемся участии в дальнейшей работе И.И. Лепешко. По совместно разработанной программе экспериментальные результаты должны были быть получены к IV кварталу 1970 г., однако этот план не удалось реализовать. Поэтому в декабре 1970 г. на кафедре теоретической механики БПИ были возобновлены работы по проектированию стенда и изготовлению его на МТЗ по договору о творческом содружестве (1971) с привлечением Ю.А. Гурвича. В процессе проектирования стенда был использован опыт СКБ №12,где автор статьи работал ранее в качестве конструктора I категории.

Таблица 1

Параметры	Входные опытные данные Бойко-ва В.П.	Расчетные значения
Продольная жесткость (эффективная) (кН/м)	325,0	325,3
Коэффициент тангенциального псевдоскольжения (кН)	40,0	40,1
Боковая жесткость (эффективность) (кН/м)	147,0	147,0
Коэффициент нормального псевдоскольжения (кН/рад) (коэффициент увода по боковой силе)	28,7	28,7
Нагрузка на колесо (кН)	5,50	5,52
Угловая жесткость (эффективная) (кНм/рад)	2,85	2,86
Длина области контакта (м)	0,198	0,198
Радиус шины (м)	0,485	0,485
Радиус качения в свободном режиме (м)		0,479
Статический радиус (м)		0,462
Половина контактного угла (рад)		0,211
Половина приведенной ширины контакта (м)		0,06
Нормальная жесткость (кН/м)		363,8
Коэффициент увода по стабилизирующему моменту (кНм/рад)		1,70
Жесткость по развалу (кНм/рад)		1,29

Массивы коэффициентов в соответствии с различными вариантами теории в обозначениях [18]

Вариант 1

Массив коэффициентов K

$K_1 = 626,7$ $K_2 = 30,35$ $K_3 = 325,3$ $K_4 = 179,5$ $K_5 = 35,64$

$K_6 = 147,0$ $K_7 = 5,519$ $K_8 = 363,8$ $K_9 = -2,517$ $K_{10} = 13,08$

$K_{11} = 5,519$ $K_{12} = 13,08$ $K_{13} = -0,255$ $K_{14} = 5,010$ $K_{15} = 6,953$

$K_{16} = 1,704$ $K_{17} = 0,046$ $K_{18} = 0,083$ $K_{19} = 0,197$ $K_{20} = 0,195$

Вариант 2

Массив коэффициентов F

$F_1 = 325,3$ $F_2 = 147,0$ $F_3 = 5,519$ $F_4 = 363,8$ $F_5 = -0,509$

$F_6 = 5,519$ $F_7 = 1,289$ $F_8 = -0,030$ $F_9 = 5,010$ $F_{10} = 19,37$

$F_{11} = 1,704$

Массив коэффициентов s

$s_1 = 199,8$ $s_2 = 24,61$ $s_3 = 16,48$ $s_4 = 88,56$ $s_5 = 17,31$

$s_6 = 199,8$ $s_7 = 24,61$ $s_8 = 16,48$

Вариант 3

(случай больших кинематических параметров по Неймарку и Фуфаеву)

Массив коэффициентов F

$F_1 = 325,3$ $F_2 = 147,0$ $F_3 = 5,519$ $F_4 = 363,8$ $F_5 = -0,509$

$F_6 = 5,519$ $F_7 = 1,289$ $F_8 = -0,030$ $F_9 = 5,010$ $F_{10} = 19,37$

$F_{11} = 1,704$ $F_{12} = 8,117$ $F_{13} = 0,670$ $F_{14} = 5,117$

Вариант 4

Случай больших скоростей или малой кинематической частоты по Неймарку и Фуфаеву

Матрица коэффициентов А

$A_1=11,14$	$A_2=26,83$			
$A_3=60,08$	$A_4=28,74$	$A_5=3,47$		
$A_6=6,619$	$A_7=363,8$	$A_8=-1,062$		
$A_9=2,251$	$A_{10}=1,079$	$A_{11}=-0,004$	$A_{12}=0,130$	$A_{15}=1,290$
$A_{14}=1,288$	$A_{15}=0,413$			
$A_{16}=1,704$	$A_{17}=0,297$	$A_{18}=3,557$	$A_{19}=0,095$	

Стенд, методика эксперимента и результаты описаны в работах [12, 19, 20,22,30]. Характерной особенностью методики является исключение влияния сил инерции на экспериментально замеренные значения сил и моментов, использование стержневой системы тензометрических элементов и сообщение гармонического воздействия в боковом направлении посредством осевого перемещения бегового барабана по отношению к шине. Существенным является также использование безразмерной кинематической частоты в качестве аргумента. К недостаткам следует отнести малый диаметр бегового барабана в сравнении, например, с диаметром тракторных шин, что явилось причиной увеличения зон проскальзывания в области контакта. Проскальзывание и различие между трением покоя и скольжения привели к необходимости введения эффективных жесткостей.В то же время качественная картина даже при наличии проскальзывания в зонах, составляющих 20%—30% от длины области контакта, оказалась достаточно хорошо согласующейся с теоретическими результатами, полученными при пренебрежимо малом проскальзывании. Таким образом, эксперимент оказался достаточно эффективным, так как уже по одному виду экспериментальных частотных характеристик можно судить о применимости той или иной теории качения.

б) Определение экспериментальных частотных характеристик продольной силы.

Результаты по экспериментальному исследованию частотных характеристик продольной силы в функции кинематической частоты, по-видимому, впервые получены в работе [32], доложены 02.02.1979 г. на 35-й научно-технической конференции БПИ и 24.10.1979 на семинаре по качению эластичного колеса в МАДИ. Характерной особенностью метода и описанного экспериментального стенда является использование плоской опорной поверхности вместо бегового барабана. Стенд обеспечивает также автоматическую синхронизацию осцилляционного движения опорной плоскости и прямолинейного движения центра колеса и дает возможность изменять функцию тангенциального псевдоскольжения по гармоническому закону, что приводит к периодическому изменению продольной силы, колеблющейся около нулевого значения, соответствующего свободному режиму качения. Изложен метод обработки частотных характеристик, полученных при наличии проскальзывания в

области контакта. Показано, что с увеличением зон скольжения становятся менее заметными, а затем и полностью исчезают характерные максимумы, наблюдаемые на характеристиках при пренебрежимо малом проскальзывании.

Укажем также на стенд для испытания тракторных шин, проект которого создан при участии автора. Стенд позволяет снимать частотные характеристики для всех составляющих реакции связи при изменении по гармоническому закону пяти входных величин, имеет плоскую опорную поверхность и проектировался под общим руководством докт.техн.наук, проф. В.В. Гуськова.

IV. **Приложения теории качения к задачам динамики.** Конечной целью разработки теории качения является ее использование в исследованиях динамики систем, имеющих в своем составе катящееся деформируемое колесо (шину). В работах [4,16] исследована, в частности, система самоустанавливающегося колеса шасси с использованием теории, приводящей к разностным уравнениям. Показано, что в пределах области устойчивости по теории Келдыша наблюдается множество областей неустойчивости. Дальнейшее исследование этой системы при учете нелинейного демпфирования по методу гармонической линеаризации показало, что ряд областей неустойчивости исчезают, хотя наиболее широкие могут оставаться в зависимости от характеристики демпфера. Аналогичная система применительно к автомобилю рассмотрена в работе [29]. При этом использован второй вариант теории при учете ширины области контакта. Результаты оказались близкими к экспериментальным, что подтверждает, в частности, существенную роль, которую играет ширина области контакта, и разработанную методику расчета. Особенностью разработанного алгоритма счета является то, что характеристический полином системы формируется в процессе счета на ЭВМ.

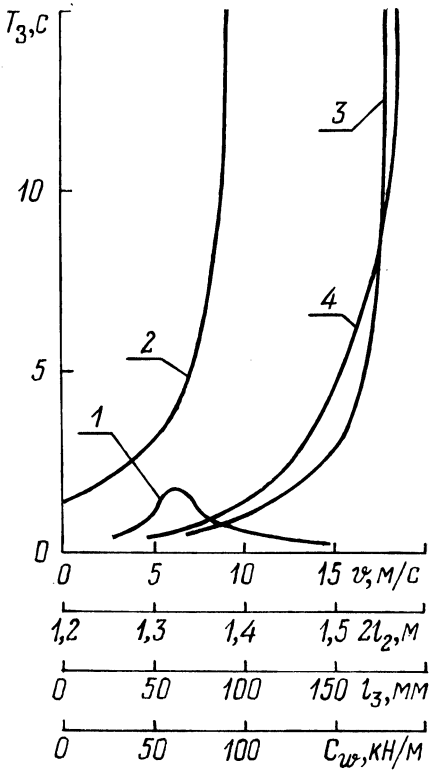

Рис. 2. Зависимость времени затухания колебаний T_3 в функции различных параметров управляемых колес (кривая 1 — зависимость от скорости движения v ; 2 – от ширины колеи $2l_2$; 3 – от размера l_3 поворотной цапфы (см. [23]) ; 4 — от жесткости пружин подвески c_w).

В работе [10] рассмотрены колебания и частотные характеристики в системе подвески с продольной жесткостью, в системе трансмиссии и колебательное движение колеса в вертикальном направлении. Анализ сделан с использованием различных вариантов теории качения. Показано, что варианты теории более высокой точности позволяют обнаружить ряд новых особенностей в динамике и прежде всего для малоинерционных систем.

В работах [17,21] представлены результаты исследования продольной реакции на ведущих колесах системы трактора МТЗ-50 и МТЗ-80 в период разгона, а также силовые и кинематические параметры муфты сцепления с учетом сухого трения. Использован второй вариант теории (обобщение теории Келдыша) с усовершенствованием, принимающим во внимание значительные скольжения и большие продольные силы в области контакта. Алгоритм счета на ЭВМ учитывает сухое трение в муфте сцепления с фиксацией моментов сцепления и расцепления. Эти моменты вычисляются с заданной точностью методом половинного деления. Разработанная методика расчета дает удовлетворительное согласование с результатами эксперимента.

Методика расчета колебаний управляемых колес трактора "Беларусь" дана в работе [23]. Вычислены границы областей устойчивости и время затухания колебаний в функции параметров системы на основе программы на ФОРТРАНе. Учитывается поворот балки моста, два перемещения обоих колес вдоль осей шкворней, угол поворота управляемых колес и два поворота во вращении вокруг осей по отношению к системе шкворня, а также все геометрические, жесткостные и кинематические параметры системы — всего около 35. Система управляемых колес описывается посредством 24-х уравнений первого порядка, которые решаются численными методами. Получено хорошее качественное совпадение результатов расчета с опытными данными. На рис. 2 представлены результаты вычислений для времени затухания колебаний при некоторых параметрах системы в работе [23], когда имеется зазор в рулевом приводе.

Литература

1. Левин М.А. Новая теория бокового увода колеса, приводящая к интегрально-разностным или дифференциально-разностным уравнениям. — В сб.: Материалы секции теоретической и прикладной механики: 25-ая конференция БПИ. Минск, 1969, с. 18—34. 2. Левин М.А. Определение боковой силы увода и момента, действующих на колесо автомобиля со стороны дороги. — В кн.: Тезисы докладов научно-технической конференции молодых ученых Белоруссии (техн. и с/х науки). — Минск, 1969, с. 4—6. 3. Левин М.А. Нестационарный увод колеса с учетом проскальзывания в области контакта. — В сб.: Материалы секции теоретической и прикладной механики: 26-ая конфереренция БПИ. Минск, 1970, с. 73—80. 4. Левин М.А. Примеры определения условий самовозбуждения автоколебаний в системах с деформируемым колесом. — В сб.: Материалы секции теоретической и прикладной механики: 26-ая конференция БПИ. Минск, 1970, с. 80—86. 5. Левин М.А. Теория движения деформируемого колеса, приводящая к разностным уравнениям, при отсутствии увода. — В сб.: Материалы секции теоретической и прикладной механики: 26-ая конференция БПИ. Минск, 1970, с. 86—88. 6. Левин М.А. Определение параметров стационарного и нестационарного увода колеса. — В кн.: V и VI всесоюзные научно-технические семинары "Опыт работы по улучше-

нию устойчивости и управляемости автомобиля в соответствии с нормами безопасности движения", 18–20 ноября 1969, 27–29 октября 1970: Тез. докл. НАМИ. — М., 1972, с. 19–20. 7. Левин М.А. Зависимость тангенциальной реакции от псевдоскольжения при качении упругого колеса. — ДАН БССР, 15, 1971, № 5, с. 414–416. 8. Левин М.А. Стационарные и амплитудно-фазо-частотные характеристики для реакций колеса с пневматической шиной. — В сб.: Механизация лесоразработок и транспорт леса. Минск, Вышэйшая школа, 1972, вып. 2, с. 96–104. 9. Левин М.А. О реакциях связей упругого колеса при качении. — ДАН БССР, 16, 1972, № 5, с. 414–417. 10. Левин М.А. Некоторые результаты исследования реакций связей деформируемого колеса. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика: [Тематический сборник]. Минск, 1973, с. 3–17. 11. Левин М.А. Характеристики установившегося увода деформируемого колеса. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика: [Тематический сборник]. Минск, 1973, с. 18–26. 12. Левин М.А., Гурвич Ю.А. Экспериментальная установка для получения характеристик нестационарного увода деформируемого колеса. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика: [Тематический сборник]. Минск, 1973, с. 27–31. 13. Левин М.А. Исследование нестационарного увода шины с учетом жесткости протектора. —Известия АН БССР. Сер. физ.-техн., 1973, № 4, с. 112–118. 14. Левин М.А. В статье: Институт проблем механики. Семинары. — Известия АН СССР. МТТ, 1974, № 4, с. 184. 15. Левин М.А. Понижение порядка зависимостей для реакций связей катящегося деформируемого колеса. — ДАН БССР, 18, 1974, № 6, с. 516–519. 16. Левин М.А. К вопросу о шимми переднего колеса трехколесного шасси на основе теории увода, приводящей к разностным уравнениям. — В кн.: Конференция по колебаниям механических систем: Тез. докл. Киев: Наукова думка, 1971, с. 56–57. 17. Левин М.А. О нелинейных колебаниях в системе с деформируемым колесом. — В кн.: Проблемы нелинейных колебаний механических систем: Тез. докл. конф. Киев: Наукова думка, 1974, с. 114–115. 18. Левин М.А. К вопросу о понижении порядка выражений, описывающих реакции связи катящегося деформируемого колеса. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Вышэйшая школа, 1975, вып. 2, с. 146–166. 19. Левин М.А., Гурвич Ю.А. Экспериментальное определение характеристик пневматика при боковых гармонических воздействиях. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Вышэйшая школа, 1975, вып. 2, с. 166–172. 20. Левин М.А., Гурвич Ю.А. Об экспериментальном определении фазо-частотных характеристик боковой составляющей реакции связи в функции кинематической частоты деформируемых колес. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Вышэйшая школа, 1976, вып. 3, с. 140–146. 21. Левин М.А., Солонский А.С., Мататова А.П. Приложение теории качения деформируемого колеса к исследованию динамики разгона трактора. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Вышэйшая школа, 1976, вып. 3, с. 146–156. 22. Левин М.А., Гурвич Ю.А., Атаманова Ю.Е. Лабораторный практикум по курсу "Испытание трактора". Ч. I. Минск, 1977. — 52 с. 23. Применение теории качения деформируемого колеса к исследованию колебаний управляемых колес трактора/ М.А. Левин, В.В. Гуськов, А.Т. Скойбеда, Ю.А. Гурвич — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Вышэйшая школа, 1977, вып. 4, с. 56–67. 24. Левин М.А. Безразмерные частотные характеристики реакций связи катящегося деформируемого колеса в соответствии с различными вариантами теории качения. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Вышэйшая школа, 1977, вып. 4, с. 67–70. 25. Левин М.А. Определение реакций связей катящегося деформируемого колеса. — Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 6, с. 75–86. 26. Левин М.А. Определение коэффициентов в теории качения деформируемого колеса. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Вышэйшая школа, 1978, вып. 5, с. 78–82. 27. Левин М.А. Определение кинематических коэффициентов в теории качения. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Вышэйшая школа, 1979, вып. 6, с. 53–63. 28. Баршай О.С., Левин М.А. Нестационарное движение гибкой нити, взаимодействующей со шкивом. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Вышэйшая школа, 1979, вып. 6, с. 63–71. 29. Левин М.А., Выгонный А.Г. К исследованию динамики катящегося самоустанавливающегося колеса. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Вышэйшая школа, 1980, вып. 7, с. 21–24. 30.

Л е в и н М.А. По поводу статьи Ю.А. Гурвича "Экспериментальное определение частотных характеристик стабилизирующего момента при боковом перемещении деформируемого колеса." Теоретическая и прикладная механика.Минск, 1978, вып. 5. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Вышэйшая школа, 1980, вып. 7, с. 133—137. 31. Л е в и н М.А. К определению реакций опорной поверхности простейшего катящегося деформируемого колеса. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Вышэйшая школа, 1981, вып. 8, с. 31—38. 32. Л е в и н М.А. Экспериментальное определение частотных характеристик продольной реакции катящегося деформируемого колеса. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Вышэйшая школа, 1981, вып. 8, с. 38—47. 33. Л е в и н М.А. Представление анизотропного тела в виде регулярной стержневой модели. — ДАН БССР, 8, 1964, № 12, с. 772--775. 34. Л е в и н М.А. Некоторые задачи о регулярных стержневых системах. — Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1965, № 9, с. 41—48. 35. Л е в и н М.А. Построение дискретной модели анизотропного тела в виде регулярной стержневой системы. — В кн.: Применение электронных вычислительных машин в строительной механике. Киев: Наукова думка, 1968, с. 74—79. 36. Л е в и н М.А. Связь между дискретными стержневыми и континуальными системами строительной механики и применение ее к расчету. Автореф. дис. канд. техн. наук. — Минск, 1965. — 23 с. 37. Л е в и н М.А. Напряжения и деформации в растущих телах. — ДАН БССР, 11, 1967, № 3, с. 222—225. 38. Л е в и н М.А. К вопросу определения растущего тела. — В сб.: Материалы секции теоретической и прикладной механики: 25-ая конференция БПИ. Минск, 1969, с. 34—39. 39. Л е в и н М.А. Напряжения в цилиндрической отливке после ее затвердевания. — X научное совещание по тепловым напряжениям в элементах конструкций: Тез. докл. Киев: Наукова думка, 1969, с. 33. 40 Л е в и н М.А. Определение напряжений в затвердевающей отливке. — Прикладная механика, 1969, вып. 9, с. 76—82. 41. Семинар по качению эластичного колеса.—- Автомобильная промышленность, 1976, № 9, с. 43—44. 42. О качении эластичного колеса (по материалам семинара МАДИ) . — Автомобильная промышленность, 1978, № 4, с. 45—47.

УДК 531.391+531.19

В.С. Вихренко, канд.физ.-мат.наук, доцент,
М.И. Кулак, ассистент
(БТИ)

К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ МНОГИХ ЧАСТИЦ

Исследование динамического поведения системы многих частиц является одной из актуальных задач статистической механики. В частности, представляет интерес исследование поведения системы, состоящей из взаимодействующих частиц, равновесные положения которых соответствуют узлам какой-либо кристаллической решетки. Рассмотрим систему N точечных частиц, образующих в равновесии гранецентрированную кубическую решетку. В начальный момент времени одной из частиц сообщается некоторый начальный импульс p_{10} или начальное отклонение q_{10} из узла решетки и задача состоит в изучении поведения системы в последующие моменты времени.

Гранецентрированная кубическая решетка обладает высокой степенью симметрии, однако вследствие начальных условий появляется выделенное направление (q_{10} или p_{10}), что существенно понижает симметрию задачи в целом. Это ведет к тому, что при прямом исследовании, например методом молекулярной динамики, не удается в полной мере использовать свойства