УДК 532.135

Б.И. Лапушина, канд.техн. наук, доцент (БПИ)

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ КРУГОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКО-УПРУГОЙ СРЕДЫ МЕЖДУ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Рассмотрим медленное неустановившееся течение вязко-упругой среды Максвелла в зазоре между цилиндрическими поверхностями. Задача решается в предположении, что длина каждой цилиндрической поверхности в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, равна бесконечности. Граничные условия для скоростей — условия прилипания к стенкам. Начальные условия — нулевые для скоростей и напряжений. Течение начинается из состояния покоя при заданном давлении на входе.

Рассматривая движение вязко-упругого слоя в полярной системе координат, полагаем, что линиями тока будут дуги концентрических окружностей, расположенных в плоскостях, перпендикулярных оси цилиндра (рис.1).

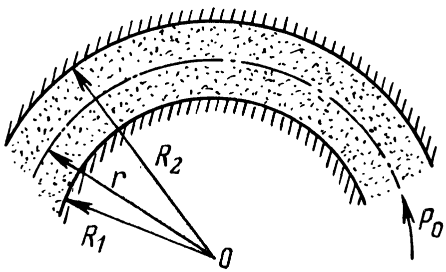

Рис. 1. Схема течения вязко-упругого слоя в зазоре.

Тогда

$$v_r = 0; \quad v_\varphi = v(r, t) \tag{1}$$

(из уравнения неразрывности следует, что $\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0$).

Пренебрегая массовыми силами и конвективными членами, дифференциальные уравнения движения для медленного течения запишем в виде:

$$\frac{\partial p_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{p_{rr} - p_{\varphi\varphi}}{r} = 0;$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{2p_{r\varphi}}{r}\right) = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Реологические соотношения для модели Максвелла с учетом (1) примут форму

$$\frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial t} + \frac{G}{\eta} p_{r\varphi} = G\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right).$$

Из приведенных уравнений следует, что $\frac{\partial p}{\partial \varphi}$ может быть только функцией t или константой. (По условию задачи $\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \kappa = \mathrm{const}$).

Решение сводится к интегрированию системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_{r\varphi}}{\partial t} + \dfrac{G}{\eta} p_{r\varphi} = G\left(\dfrac{\partial v}{\partial r} - \dfrac{v}{r}\right); \\ -\dfrac{\kappa}{r} + \dfrac{\partial p_{r\varphi}}{\partial r} + \dfrac{2p_{r\varphi}}{r} = \rho\dfrac{\partial v}{\partial t} \end{cases} \quad (2)$$

при заданных граничных и начальных условиях.

Применяя к (2) преобразование Лапласа по переменной t с учетом нулевых начальных условий, получим:

$$\begin{cases} \left(s + \dfrac{G}{\eta}\right) \bar{p}_{r\varphi} = G\left(\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \dfrac{\bar{v}}{r}\right); \\ \rho s \bar{v} = -\dfrac{\kappa}{rs} + \dfrac{\partial \bar{p}_{r\varphi}}{\partial r} + \dfrac{2\bar{p}_{r\varphi}}{r}. \end{cases} \quad (3)$$

Из условия совместности (3) следует дифференциальное уравнение для изображений

$$\frac{d^2\bar{v}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\bar{v}}{dr} - \left(\frac{1}{r^2} + q^2\right)\bar{v} = \frac{\left(s + \dfrac{G}{\eta}\right)}{r\,G\,s}\rho, \quad (4)$$

где $\bar{v} = \bar{v}\ (r, s)$; $q^2 = \dfrac{\left(s + \dfrac{G}{\eta}\right)}{G} \rho s$.

Решение уравнения (4) запишется в виде [1]

$$\bar{v} = A(s)\, I_1(qr) + B(s)\, K_1(qr) - \frac{\kappa}{\rho s^2 r}. \quad (5)$$

Определив A (s) и B (s) из граничных условий

$$\bar{v}\Big|_{r=R_1} = 0; \quad \bar{v}\Big|_{r=R_2} = 0, \quad (6)$$

находим

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3, \quad (7)$$

где

$$\bar{v}_1 = \frac{\kappa}{\rho R_1} \cdot \frac{[K_1(qR_2)\, I_1(qr) - I_1(qR_2)\, K_1(qr)]}{s^2 [I_1(qR_1)\, K_1(qR_2) - K_1(qR_1)\, I_1(qR_2)]};$$

$$\bar{v}_2 = -\frac{\kappa}{\rho R_2} \cdot \frac{[K_1(qR_1) I_1(qr) - I(qR_1) K_1(qr)]}{s^2 [I_1(qR_1) K_1(qR_2) - K_1(qR_1) I_1(qR_2)]};$$

$$\bar{v}_3 = -\frac{\kappa}{\rho r} \cdot \frac{1}{s^2}.$$

Применим к (7) формулу обращения

$v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \bar{v} e^{st} ds$, заменяя вычисление этого интеграла определением суммы вычетов подинтегральной функции [2]:

$$v = \Sigma \operatorname{Res} \Phi(s)\, e^{st}. \tag{8}$$

Для определения суммы вычетов подинтегральной функции, соответствующей каждому из слагаемых в (7), надо найти все нули знаменателей.

Один из нулей соответствует s = 0. В точке s=0 имеем полюс 2-го порядка. Определяя вычет A_0, в полюсе s = 0, находим

$$A_0 = \frac{\kappa R_1 R_2}{2\eta (R_2^2 - R_1^2)} \cdot \left(\frac{R_2 r}{R_1} \ln \frac{r}{R_2} + \frac{R_1 r}{R_2} \ln \frac{R_1}{r} + \frac{R_1 R_2}{r} \ln \frac{R_2}{R_1} \right). \tag{9}$$

Остальные полюсы для v_1 и v_2 определяются как корни уравнения

$$I_1(qR_1) K_1(qR_2) - I_1(qR_2) K_1(qR_1) = 0$$

или

$$J_1(\alpha R_1) Y_1(\alpha R_2) - J_1(\alpha R_2) Y_1(\alpha R_1) = 0 \tag{10}$$

$(q = \alpha i)$ [3].

Корни α_m уравнения (10) определяются аналогично [4] и для ряда значений $\frac{R_1}{R_2}$ вычислены в [5–6].

Каждому значению α_m соответствует 2 значения полюсов s_{1m} и s_{2m}, определяемых из соотношения

$$s_{jm}^2 + \frac{G}{\eta} s_{jm} + \frac{G}{\rho} \alpha_m^2 = 0,\ j = 1,2. \tag{11}$$

Проводя соответствующие выкладки, получаем

$$B_m = A_{1m} + A_{2m}$$

или

$$B_m = \frac{\kappa\pi}{R_1 R_2 G \alpha_m^2 z} e^{-\frac{G}{2\eta}t} \left[\left(\frac{G^2}{4\eta^2} + z^2 \right) \operatorname{sh} zt + \frac{G}{\eta} z \operatorname{ch} zt \right] \times$$

$$\times \frac{[J_1(\alpha_m R_1) J_1(\alpha_m R_2)]}{[J_1^2(\alpha_m R_2) - J_1^2(\alpha_m R_1)]} \cdot \Big\{ R_2 [J_1(\alpha_m r) \cdot Y_1(\alpha_m R_2) -$$

$$- J_1(\alpha_m R_2) Y_1(\alpha_m r)] - R_1 [J_1(\alpha_m r) \cdot Y_1(\alpha_m R_1) -$$

$$- J_1(\alpha_m R_1) \cdot Y_1(\alpha_m r)] \Big\} \text{ где } z = \sqrt{\frac{G^2}{4\eta^2} - \frac{G}{\rho} \alpha_m^2}. \qquad (12)$$

Таким образом, поле скоростей будет определяться формулой

$$v = A_o + \sum_{m=1}^{\infty} B_m. \qquad (13)$$

Решение соответствующей квазистационарной задачи дает

$$v = \frac{\kappa R_1 R_2}{2\eta (R_2^2 - R_1^2)} \cdot \left(\frac{R_1 R_2}{r} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_1 r}{R_2} \ln \frac{R_1}{r} + \right.$$

$$\left. + \frac{R_2 r}{R_1} \ln \frac{r}{R_2} \right). \qquad (14)$$

Из сравнения выражения (13) и (14) видно, что последнее следует из (13) как предельный случай, если t устремить к бесконечности.

Устремляя к бесконечности G, получаем в пределе решение соответствующей задачи для вязкой жидкости.

Литература

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971. — 402 с. 2. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. — М.: Наука, 1965. –218. с. 3. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. — М.–Л.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1963. — 139 с. 4. Карслоу Х., Егер Д. Операционные методы в прикладной математике. — М.: Изд.-во иностр. лит., 1948. — 191 с. 5. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1968. — 242 с. 6. Лебедев А.В., Федорова Р.М. Справочник по математическим таблицам. — М.: АН СССР, 1956. –292 с.