

Л и т е р а т у р а

1. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. — ПММ, т. 24, 1960, вып. 5 . 2. Рыжик В.М. Вытеснение нефти водой в пористой среде с малопроницаемыми включениями. — Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 1 . 3. К теории фильтрации несмешивающихся жидкостей в трещиновато-пористых средах/ А.А. Боксерман, В.Л. Данилов, Ю.П. Желтов, А.А. Кочешков. — Теория и практика добычи нефти: Ежегодник ВНИИ нефтегаз. — М.: Недра, 1966 . 4. Шаймуратов Р.В. Гидродинамика нефтяного трещиноватого пласта. — М.: Недра, 1960 . 5. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. — М.: Недра, 1972 . 6. Чижов С.И., Майдебор В.Н. Анализ результатов экспериментальных исследований движения жидкостей в моделях трещиноватой среды при нелинейных законах фильтрации. — Труды СевКа НИПИнефть, 1975, вып. 21 . 7. Эфрос Д.А. Исследования фильтрации неоднородных систем. — Л.: Гостехиздат, 1963 . 8. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1968 . 9. Швидлер М.И., Данилов В.Л. О расщеплении задач многомерной фильтрации несжимаемых жидкостей. — Докл. АН СССР, т. 211, 1973, № 5.

УДК 532.135:532.5

Е.Н. Ламбина, канд. физ.— мат. наук, доцент
(БПИ)

КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКО-УПРУГОЙ СРЕДЫ МЕЖДУ СБЛИЖАЮЩИМИСЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛАСТИНАМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Постановка задачи. В зазоре между параллельными пластинами произвольной формы заключена вязко-упругая несжимаемая среда. Одна из пластин неподвижна и расположена в плоскости xOy (рис. 1). Вторая пластина медленно движется навстречу неподвижной пластине со скоростью $v(t)$ ($v(0)=0$).

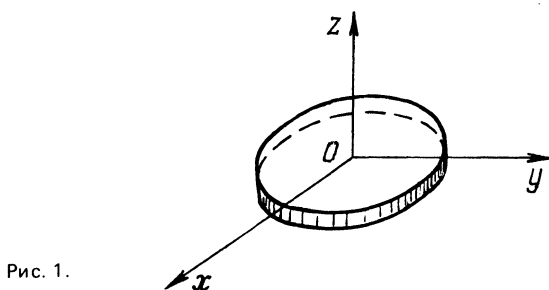


Рис. 1.

h — расстояние между пластинами. Требуется определить распределение скоростей, нормального давления и касательных напряжений в зазоре между пластинами, а также результирующую силу P , действующую на подвижную пластину. Нормальное давление предполагается независимым от координаты z , т.е. $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$ (последнее соотношение является общепринятым в гид-

родинамической теории смазки [1]). Течение рассматривается в пренебрежении ускорениями и массовыми силами. Начальные условия полагаются нулевыми (т.е. скорости и напряжения в начальный момент времени равны нулю).

Первоначально рассмотрим частный случай — течение вязкой несжимаемой жидкости.

Общая форма решения для вязкой несжимаемой жидкости. Выпишем основные соотношения задачи.

Уравнения движения:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right);$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right);$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Граничные условия

$$v_x|_{z=0} = v_y|_{z=0} = v_z|_{z=0} = 0;$$

$$v_x|_{z=h} = v_y|_{z=h} = 0; \quad v_z|_{z=h} = -v(t)$$

(условия прилипания);

$$p|_L = 0$$

(L — контур пластины).

Нетрудно доказать (или убедиться непосредственной подстановкой), что общее решение, удовлетворяющее всем этим соотношениям, имеет вид:

$$v_x = \frac{3v(t)}{h} \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{z}{h} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - x \right);$$

$$v_y = \frac{3v(t)}{h} \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{z}{h} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - y \right);$$

$$v_z = v(t) \left(2 \frac{z^3}{h^3} - 3 \frac{z^2}{h^2} \right);$$

$$p = \frac{6\mu v(t)}{h^3} \left(\psi - \frac{x^2 + y^2}{2} \right);$$

$$p_{xy} = \frac{6\mu v(t)}{h} \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{z}{h} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y};$$

$$p_{xz} = \frac{3\mu v(t)}{h^2} \left(\frac{2z}{h} - 1 \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - x \right);$$

$$p_{yz} = \frac{3\mu v(t)}{h^2} \left(\frac{2z}{h} - 1 \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - y \right);$$

$$P = \int \int_S p \, ds,$$

где $\psi(x, y)$ — гармоническая функция, удовлетворяющая граничному условию

$$\psi(x, y) \Big|_L = \frac{x^2 + y^2}{2}. \quad (1)$$

Таким образом, определение течения сводится к хорошо изученной задаче Дирихле для уравнения Лапласа.

Частные случаи. Решение уравнения Лапласа при граничном условии типа (1) соответствует некоторым другим физическим задачам (вращение идеальной жидкости; ламинарное течение вязкой жидкости в канале произвольного сечения; кручение призматических стержней; выпучивание тонкой мембраны, закрепленной по периметру) и известно для ряда областей. Выпишем соответствующие результаты применительно к рассматриваемой задаче для пластин простейшей формы (ограничимся определением p и P).

Эллиптические пластины:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$\psi = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right);$$

$$p = \frac{6\mu v(t) a^2 b^2}{(a^2 + b^2) h^3} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right);$$

$$P = \frac{3\mu v(t) \pi a^3 b^3}{(a^2 + b^2) h^3}.$$

При $a = b = R$ (круглые пластины)

$$p = \frac{3\mu R^2}{h^3} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \cdot v(t);$$

$$P = \frac{3}{2} \pi \mu \frac{R^4}{h^3} v(t),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Прямоугольные пластины:

$$0 \leq x \leq a; \quad 0 \leq y \leq b;$$

$$\psi = \frac{x^2 + y^2}{2} - x(x-a) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi m x}{a} \left(A_m \operatorname{ch} \frac{\pi m y}{a} + B_m \operatorname{sh} \frac{\pi m y}{a} \right),$$

где $A_m = \frac{2a^2}{\pi^3 m^3} (\cos \pi m - 1);$

$$B_m = -A_m \frac{(\operatorname{ch} \frac{\pi m b}{a} - 1)}{\operatorname{sh} \frac{\pi m b}{a}};$$

$$p = \frac{6 \mu v(t)}{h^3} [-x(x-a) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi m x}{a} (A_m \operatorname{ch} \frac{\pi m y}{a} + B_m \operatorname{sh} \frac{\pi m y}{a})];$$

$$p = \frac{\mu v(t)}{h^3} \left[\frac{ab(a^2 + b^2)}{2} -$$

$$\frac{96}{\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} \cdot (a^4 \operatorname{th} \frac{2n-1}{2a} \pi b + b^4 \operatorname{th} \frac{2n-1}{2b} \pi a) \right].$$

Для квадратичных пластин со стороной a

$$P = \frac{\mu a^4}{h^3} v(t) \cdot \left[1 - \frac{192}{\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \operatorname{th} \frac{2n-1}{2} \pi \right]$$

или после суммирования ряда

$$P = \frac{0,42173 \mu a^4 \cdot v(t)}{h^3}$$

Треугольные равносторонние пластины со стороной b . Начало координат совпадает с центром неподвижной пластины; ось x параллельна одной из сторон

$$\psi = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3b} \left(y + \frac{b}{2\sqrt{3}} \right) \left(y + \sqrt{3}x - \frac{b}{\sqrt{3}} \right) \times$$

$$\times \left(y - \sqrt{3}x - \frac{b}{\sqrt{3}} \right);$$

$$p = \frac{2\sqrt{3}}{b} \cdot \frac{\mu v(t)}{h^3} \left(y + \frac{b}{2\sqrt{3}} \right) \left(y + \sqrt{3}x - \frac{b}{\sqrt{3}} \right) \times$$

$$\times \left(y - \sqrt{3}x - \frac{b}{\sqrt{3}} \right);$$

$$p = \frac{3\sqrt{3}}{80} \cdot \frac{\mu b^4 v(t)}{h^3}.$$

Результаты основываются на соответствующих решениях для задач ламинарного течения вязкой жидкости в каналах [2]. Решения для эллиптических и круглых пластин совпадают с известными решениями О. Рейнольдса [1,3].

Применение конформного отображения. В случае пластин произвольной формы можно использовать метод, развитый академиком Н.И. Мусхелишвили для исследования кручения призматических стержней [4]. Задача определения функции $\psi(x, y)$ может считаться решенной, если известно отображение области s , ограниченной контуром L , на единичный круг. Пусть, действительно,

$$\delta = x + iy = \omega(\xi)$$

есть соотношение, отображающее область s на круг $|\xi| < 1$, окружность которого обозначим через γ . Обратное преобразование обозначим через $\omega^{-1}(\delta)$. Введем комплексную функцию течения

$$F(\delta) = \psi + i\varphi$$

(φ — гармоническая функция, сопряженная с ψ). Выразим $F(\delta)$ через ξ и положим $F(\delta) = F(\omega(\xi)) = \Phi(\xi)$. $\Phi(\xi)$ будет функцией голоморфной внутри γ . Ее действительная часть ψ удовлетворяет на γ граничному условию

$$\psi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\delta \cdot \bar{\delta} = \frac{1}{2}\omega(\sigma)\omega(\bar{\sigma}), \quad (\sigma < \gamma).$$

Тогда по формуле Шварца с точностью до произвольной мнимой постоянной

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)\omega(\bar{\sigma})}{(\sigma - \xi)\xi} (\sigma + \xi) d\sigma,$$

далее

$$F(\delta) = \Phi(\omega^{-1}(\delta)); \quad \psi = \text{Re } F(\delta)$$

и задача решена. Если в интеграле Шварца выражение

$$\omega(\sigma) \overline{\omega(\bar{\sigma})} = \omega(\sigma) \omega\left(-\frac{1}{\bar{\sigma}}\right),$$

рассматриваемое как функция от σ , представляет собой однозначную аналитическую функцию внутри γ , непрерывную вплоть до γ и имеющую внутри γ конечное число полюсов, то интеграл вычисляется на основании теоремы о вычетах.

Решение для вязко-упругих сред. Рассмотрим несжимаемую вязко-упругую среду, уравнение состояния которой имеет вид

$$S = 2 \int_0^t \mu(t-\tau) \dot{\epsilon}(\tau) d\tau,$$

где S и $\dot{\epsilon}$ — девиаторы напряжений и скоростей деформации соответственно; $\mu(t)$ — функция релаксации.

Нетрудно показать, что поле скоростей между пластинами в этом случае будет таким же, как и для вязкой несжимаемой жидкости, поскольку решение для вязкой несжимаемой жидкости допускает разделение переменных [5]. Нормальное давление p и касательные напряжения p_{xy} , p_{xz} , p_{yz} определяются из соответствующих величин для вязкой жидкости, если в последних заменить множитель $\mu v(t)$ выражением

$$\int_0^t \mu(t-\tau) \dot{v}(\tau) d\tau.$$

Независимость распределения скоростей от уравнения состояния имеет место и для сред, не имеющих конечной функции релаксации. Напряженное состояние зависит от реологического состояния среды. Так, для модели Фойхта

$$S = 2\eta \dot{\epsilon} + 2G\epsilon.$$

Нормальное давление p и касательные напряжения определяются из соответствующих величин для вязкой жидкости заменой множителя $\mu v(t)$ выражением

$$\eta v(t) + G \int_0^t v(t) dt,$$

поскольку уравнения движения в напряжениях $\text{Div } s=0$ и соотношение (2) удовлетворяются при такой замене тождественно.

Л и т е р а т у р а

1. Гидродинамическая теория смазки. — М.—Л.: ГТТИ, 1931. — 294 с. 2. Х а п е л ь Дж., Б р е н н е р Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. — М.: Мир, 1976. — с. 51—56. 3. Т а р г С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. — М.—Л.: Гостехиздат, 1951. — 90 с. 4. М у с х е л и ш в и л и Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: АН СССР, 1954, с. 528—531. 5. Л а п у ш и н а Б.И. Квазистационарные задачи течения вязко-упругой среды, допускающие разделение переменных. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. — Минск, Высшая школа, 1979, вып. 6, с. 101—105.