Используя известную схему [2] доказывается следующая теорема.

Теорема 4. Собственные числа системы (9) действительны и по модулю строго больше единицы. Полюсы резольвенты простые.

Литература

1. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости/ В.Д. Купрадзе, Т.Г. Гегелиа, М.О. Башелейшвили, Т.В. Бурчуладзе. – М.: Наука, 1976. –663 с.
2. Гурса Э. Курс математического анализа. – М. – Л.: ОНТИ, т. 3, ч. II, 1934. – 318 с.

УДК 532.546:519.3

М.М. Чепинога, канд.физ.-мат.наук, доцент (БГУ)

НЕКОТОРЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

В работе рассмотрены следующие пространственные стационарные задачи теории фильтрации.

1. Движение несжимаемой жидкости в изотропном грунте при нелинейной зависимости общего вида между скоростью фильтрации $\bar{v}$ и пьезометрическим уклоном $\bar{I}$.

2. Аналогичная задача в случае двухслойного грунта.

3. Движение сжимаемой жидкости в анизотропной пористой среде.

Показано, что первые две задачи (являющиеся существенно нелинейными) имеют вариационную формулировку и могут быть решены прямыми методами вариационного исчисления.

Третья задача (являющаяся также нелинейной) при помощи преобразований приводится к линейной задаче, исследованной атвором в [4]. В частном случае однородной изотропной среды эта задача приводится к известной смешанной задаче для гармонической функции.

1. Движение несжимаемой жидкости в изотропном грунте. Из опытов известно, что при движении жидкости в грунте скорость фильтрации $\bar{v}$ является функцией пьезометрического уклона $\bar{I}$ [1]. В простейшем случае принимают линейную зависимость $\bar{v} = -k\bar{I}$ (закон Дарси). Для крупнозернистых грунтов или при больших скоростях движения (число Рейнольдса больше 10) зависимость $\bar{v}$ от $\bar{I}$ будет нелинейной. С.А. Христианович рассмотрел нелинейную плоскую задачу, считая $\bar{I} = -\dfrac{\Phi(v)}{v}\bar{v}$ [2].

В настоящем разделе изучается пространственная стационарная фильтрация несжимаемой жидкости при нелинейной зависимости $\bar{v}$ от $\bar{I}$ общего вида [1]

$$\bar{v} = -\kappa(a)\bar{I}\,; \quad a = I^2\,; \quad \bar{I} = \operatorname{grad} h, \tag{1.1}$$

где $\kappa(a) > 0$ есть известная дифференцируемая функция, определяемая экспериментально. В силу несжимаемости

$$\operatorname{div}\bar{v} = 0. \tag{1.2}$$

Если подставить $\bar{v}$ из (1.1) в (1.2), то получим нелинейное дифференциальное уравнение для пьезометрического напора h. Пусть фильтрация происходит в объеме τ, ограниченном поверхностью $\Sigma = s + \sigma$. На s зададим давление (а значит, и напор), а на σ — нормальную составляющую скорости:

$$\text{на } s \qquad h = f; \tag{1.3}$$

$$\text{на } \sigma \qquad v_n = u, \tag{1.4}$$

где f и u — заданные функции точек поверхностей s и σ соответственно.

Покажем, что краевой задаче (1.1) - (1.4) можно дать вариационную формулировку. Определим функционал

$$M(h) = \frac{1}{2} \int_\tau \Gamma(a)\, d\tau + \int_\sigma uh\, ds; \tag{1.5}$$

$$\Gamma(a) = \int_0^a \kappa(a)\, da \tag{1.6}$$

на множестве функций h, дважды дифференцируемых в τ, непрерывных с первыми производными в $\tau + \Sigma$ и удовлетворяющих условию (1.3). Найдем вариацию M:

$$\delta M = \frac{1}{2} \int_\tau \delta\Gamma\, d\tau + \int_\sigma u\, \delta h\, ds.$$

Преобразуем первый интеграл, используя (1.1), (1.6) и теорему Гаусса—Остроградского

$$\frac{1}{2} \int_\tau \delta\Gamma\, d\tau = \frac{1}{2} \int_\tau \frac{d\Gamma}{da} \delta a\, d\tau = \int_\tau \kappa(a)\, \bar{I} \cdot \delta \bar{I}\, d\tau =$$

$$= -\int_\tau \bar{v} \cdot \operatorname{grad} \delta h\, d\tau = -\int_\tau [\operatorname{div}(\delta h\, \bar{v}) - \operatorname{div} \bar{v}\, \delta h]\, d\tau =$$

$$= -\int_\Sigma v_n\, \delta h\, ds + \int_\tau \operatorname{div} \bar{v}\, \delta h\, d\tau.$$

Так как $\delta h = 0$ на s получим для δM

$$\delta M = \int_\tau \operatorname{div} \bar{v}\, \delta h\, d\tau - \int_\sigma (v_n - u)\, \delta h\, ds. \tag{1.7}$$

Отсюда следует, что для действительного движения (с учетом(1.2) и (1.4)) $\delta M = 0$, т.е. M имеет стационарное значение. Справедливо и обратное: если $\delta M = 0$, то в силу произвольности δh из (1.7) будут следовать равенства (1.2) и (1.4).

Можно показать, что если $\frac{d\kappa}{da} > 0$, то для действительного движения M будем иметь минимум. Найдем $\delta^2 M$

$$\delta^2 M = \frac{1}{2} \int_\tau \left[\frac{d\kappa}{da} (\delta a)^2 + 2\kappa (\delta I)^2 \right] d\tau.$$

При сделанном предположении $\delta^2 M > 0$, следовательно, М имеет минимум.

Итак показано, что решение краевой задачи равносильно отысканию функции, сообщающей минимум функционалу (1.5). В вариационной задаче (1.3) есть допустимое условие (1.4) - естественное, а (1.1) — уравнение Эйлера—Лагранжа.

Следовательно, для решения этой нелинейной задачи теории фильтрации можно применять прямые методы вариационного исчисления.

2. Нелинейная фильтрация в двухслойном грунте. Рассмотрим стационарную фильтрацию несжимаемой жидкости в объеме, состоящем из двух грунтов τ_1 и τ_2, имеющих общую границу s_0. Обозначим скорости фильтрации в τ_i через $\bar{v}_i$ (здесь и далее i = 1,2). Считаем скорость фильтрации нелинейной функцией пьезометрического уклона

$$\bar{v}_i = -k_i(a_i)\,\bar{I}_i; \quad a_i = I_i^2; \quad \bar{I}_i = \operatorname{grad} h_i, \tag{2.1}$$

где $k_i(a_i) > 0$, известные функции, характеризующие проницаемости грунтов.

Из условия несжимаемости

$$\operatorname{div} \bar{v}_i = 0\,. \tag{2.2}$$

Если подставить $\bar{v}_i$ из (2.1) в (2.2), то получим нелинейное дифференциальное уравнение для пьезометрического напора h_i.

Сформулируем граничные условия. На одной части границы каждого грунта s_i задаем напор, на другой части σ_i — нормальную составляющую скорости фильтрации. На s_0 должны быть равны напоры и нормальные составляющие скоростей

$$\text{на } s_i \quad h_i = f_i \quad (2.3), \qquad \text{на } \sigma_i \quad v_{in} = u_i \quad (2.4)$$

$$\text{на } s_0 \quad h_1 = h_2 \quad (2.5); \qquad \text{на } s_0 \quad v_{1n} = v_{2n}\,. \quad (2.6)$$

Задача состоит в определении h_i из нелинейных дифференциальных уравнений (2.1), (2.2) с граничными условиями (2.3) — (2.6). Краевой задаче (2.1) — (2.6) можно дать вариационную формулировку.

Обозначим

$$\Gamma_i(a_i) = \int_0^{a_i} \kappa_i(a_i)\,d a_i\,. \tag{2.7}$$

Определим функционал

$$N(h_1, h_2) = \sum_{i=1}^{2} \Big[\frac{1}{2}\int_{\tau_i} \Gamma_i(a_i)\,d\tau + \int_{\sigma_i} u_i h_i ds\Big] \tag{2.8}$$

на множестве функций h_i, дважды дифференцируемых в τ_i, непрерывных в замыканиях $\tau_i + s_i + \sigma_i + s_0$ и удовлетворяющих условиям (2.3), (2.5). Найдем вариацию N

$$\delta N = \sum_{i=1}^{2} \left[\frac{1}{2} \int_{\tau_i} \delta \Gamma_i \, d\tau + \int_{\sigma_i} u_i \, \delta h_i ds \right]. \tag{2.9}$$

Преобразуем объемный интеграл в (2.9). Учитывая равенства (2.1) и (2.7) и применяя теорему Гаусса–Остроградского, будем иметь

$$\frac{1}{2} \int_{\tau_1} \delta \Gamma_1 \, d\tau = \frac{1}{2} \int_{\tau_1} \frac{d\Gamma_1}{da_1} \delta a_1 \, d\tau = \int_{\tau_1} \kappa_1 (a_1) \, \bar{I}_1 \cdot \delta \bar{I}_1 d\tau =$$

$$= - \int_{\tau_1} v_1 \cdot \mathrm{grad} \, (\delta h_1) \, d\tau = - \int_{s_1 + \sigma_1 + s_0} v_{1n} \, \delta h_1 \, ds + \int_{\tau_1} \mathrm{div} \, \bar{v}_1 \, \delta h_1 \, d\tau. \tag{2.10}$$

Аналогично

$$\frac{1}{2} \int_{\tau_2} \delta \Gamma_2 d\tau = - \int_{s_2 + \sigma_2 - s_0} v_{2n} \, \delta h_2 ds + \int_{\tau_2} \mathrm{div} \, \bar{v}_2 \, \delta h_2 d\tau. \tag{2.11}$$

Подставляя (2.10) и (2.11) в (2.9), учитывая, что на s_i $\delta h_i = 0$, на s_0 $\delta h_1 = \delta h_2$, получим

$$\delta N = \sum_{i=1}^{2} \left[\int_{\tau_i} \mathrm{div} \, \bar{v}_i \, \delta h_i d\tau + \int_{\sigma_i} (u_i - v_{in}) \, \delta h_i ds \right] + \int_{s_0} (v_{2n} - v_{1n}) \, \delta h_1 ds. \tag{2.12}$$

Отсюда следует, что для действительного движения $\delta N = 0$.

Справедливо и обратное. Если $\delta N = 0$, то в силу произвольности δh_i из (2.12) будем иметь равенства (2.2), (2.4), (2.6). Так как

$$\delta^2 N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \int_{\tau_i} \left[\frac{dk_i}{da_i} (\delta a_i)^2 + 2k_i (\delta I_i)^2 \right] d\tau,$$

то при $\dfrac{dk_i}{da_i} > 0$, $\delta^2 N > 0$ и N будет иметь минимальное значение.

Для вариационной задачи (2.3), (2.5) будут допустимыми условиями, (2.2) – уравнением Эйлера–Лагранжа, а (2.4), (2.6) – естественными условиями.

Полученные результаты легко распространяются на случай многослойных грунтов.

Следовательно, для решения и этой задачи можно применять прямые методы вариационного исчисления.

3. Движение сжимаемой жидкости в анизотропной пористой среде. Рассмотрим теперь установившееся движение баротропной жидкости в анизотропной пористой среде. На одной части границы s зададим давление, а на другой части σ, будем считать нормальную скорость равной нулю.

Основными уравнениями задачи будут: уравнение неразрывности, закон Дарси (без учета массовых сил) и уравнение состояния [3], [4]:

$$\operatorname{div}(\rho \bar{v}) = 0, \tag{3.1}$$

$$\bar{v} = -\frac{1}{\mu} K \cdot \operatorname{grad} p; \tag{3.2}$$

$$\rho = \rho(p). \tag{3.3}$$

Предполагаем, что тензор проницаемости является известной функцией координат $K = K(x, y, z)$, коэффициент вязкости зависит только от давления

$$\mu = \mu(p), \tag{3.4}$$

где μ известная функция.

Граничные условия задачи

$$\text{на } s \qquad p = p_0; \tag{3.5}$$

$$\text{на } \sigma \qquad v_n = 0. \tag{3.6}$$

Подставив в (3.1) вместо $\bar{v}$, ρ, μ их значения из (3.2), (3.3), (3.4), получим нелинейное уравнение с переменными коэффициентами для давления

$$\operatorname{div}\left[\frac{\rho(p)}{\mu(p)} K \cdot \operatorname{grad} p\right] = 0. \tag{3.7}$$

Для решения краевой задачи (3.5) – (3.7) введем вместо давления p новую неизвестную функцию P по формуле

$$P = \int_0^p \frac{\rho(p)}{\mu(p)}\, dp. \tag{3.8}$$

Через эту функцию можно выразить массовую скорость

$$\rho\bar{v} = -\frac{\rho}{\mu} K \cdot \operatorname{grad} p = -K \cdot \operatorname{grad} P. \tag{3.9}$$

Используя это выражение, преобразуем (3.7) к такому виду

$$\operatorname{div}(K \cdot \operatorname{grad} P) = 0. \tag{3.10}$$

Для определения P получили линейное уравнение (3.10) с переменными коэффициентами. Граничные условия для P получим из (3.5) и (3.6) с учетом (3.7) и (3.8)

$$\text{на } s \qquad P = \int_0^{p_0} \frac{\rho(p)}{\mu(p)}\, dp = P_0; \tag{3.11}$$

$$\text{на } \sigma \qquad \rho v_n = -K \cdot \operatorname{grad} P \cdot \bar{n} = 0. \tag{3.12}$$

Краевая задача для P (3.10) – (3.12) имеет физический смысл. Она описывает линейную задачу о фильтрации несжимаемой жидкости единичной вязкости в той же анизотропной среде. P является в этой задаче давлением,

P_0 — заданным на s давлением, а $\rho\bar{v}$ — скоростью фильтрации. Эта краевая задача исследована в [4]. Решив ее, найдем P. После этого давление p определяется как неявная функция из (3.8). По p из (3.3) найдется плотность ρ, из (3.4) — вязкость μ.

В частном случае движения сжимаемой жидкости в изотропном однородном грунте тензор проницаемости K вырождается в скаляр к (к = const — коэффициент проницаемости), и закон Дарси запишется так:

$$\bar{v} = -\frac{1}{\mu}\,\kappa\,\mathrm{grad}\,p, \tag{3.13}$$

а уравнение (3.7) и граничные условия (3.5), (3.6) будут иметь вид

$$\mathrm{div}\left[\frac{\rho(p)}{\mu(p)}\,\mathrm{grad}\,p\right] = 0; \tag{3.14}$$

$$\text{на } s \quad p = p_0; \tag{3.15}$$

$$\text{на } \sigma \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0. \tag{3.16}$$

После замены (3.8) нелинейное уравнение (3.14) переходит в уравнение Лапласа для P

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,P) \equiv \Delta P = 0 \tag{3.17}$$

с граничными условиями

$$\text{на } s \quad P = P_0; \tag{3.18}$$

$$\text{на } \sigma \quad \frac{\partial P}{\partial n} = 0. \tag{3.19}$$

В этом случае мы приходим к известной смешанной задаче для гармонической функции P.

К краевой задаче (3.14) — (3.16) приводятся некоторые другие задачи математической физики. Например, задача о распределении тепла в теле, коэффициент теплопроводности которого зависит от температуры. Эти задачи можно решать указанным методом.

Литература

1. Полубаринова— Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. — М.: ГИТТЛ, 1952, с. 39. 2. Христианович С.А. Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси. — ПММ, т. 4, вып. 1, с. 33—52. 3. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. — М.: Высшая школа, 1972, с. 254—269. 4. Чепинога М.М. Вариационные методы в теории фильтрации. — Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат.наук, 1976, № 6, с. 37—42.