Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема: если $\vec{u}(x) \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ — решение системы Ламе, то в области D, ограниченной поверхностью S ($S \in Л_1(\alpha)$, $\alpha \geqslant 0$), оно представимо в виде

$$\vec{u}(x) = \text{grad}\,[(\vec{x}, \vec{g}\ \varphi)] - 4(1-\nu)\vec{g},$$

где $\vec{g}$, φ — гармонические функции.

Литература

1. Новацкий В. Теория упругости. — М.: Мир, 1975, — 872 с. 2. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости/ В.Д. Купрадзе, Т.Г. Гегелиа, М.О. Бешелейшвили, Т.В. Бурчуладзе. — М.: Наука, 1976. — 663 с.

УДК 517.946

Д.П. Ющенко, аспирант (БГУ)

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ СО ЩЕЛЬЮ

Пусть в евклидовом пространстве E_3 задана незамкнутая поверхность σ класса $Л_1(\alpha)$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ с простым замкнутым краем γ. Такое пространство будем называть пространством со щелью. Выберем на σ определенное направление нормали n и будем считать его положительным. Обозначим через σ^+ и σ^- стороны поверхности σ, соответствующие приближению к поверхности σ по направлению положительной и отрицательной нормалей. Требуется определить в пространстве со щелью решение $U(x) \in C^2(E_3 \setminus \bar{\sigma}) \times \cap C^1(\bar{E}_3)$ однородной системы уравнений статики моментной теории упругости (уравнений м.т.у.) [1, с. 48] и на бесконечности удовлетворяющее условиям [1, с. 109] и, кроме того, на поверхности σ решение U (x) удовлетворяет одному из краевых условий

$$U(z)\Big|_{\sigma^+} = f^+(z)\,;\ U(z)\Big|_{\sigma^-} = f^-(z)\,; \qquad \text{(задача I)}$$

$$T_z U(z)\Big|_{\sigma^+} = f^+(z)\,,\ T_z U(z)\Big|_{\sigma^-} = f^-(z)\,. \qquad \text{(задача II)}$$

Оператор напряжения $T_z \equiv T(\partial_z, n)$ определен в [1, с. 52]. Предположим, что на краю γ щели σ векторы $f^+(z)$, $f^-(z)$ совпадают и $f^{\pm}(z) \in C^{0,\beta}(\bar{\sigma})$, $(0 < \beta < \alpha \leqslant 1)$.

Единственность решений поставленных задач непосредственно следует из формулы Грина для пространства со щелью

$$\int\limits_{E_3 \setminus \sigma} E(U, U)\,dx = \int\limits_{\sigma} \left[\,\left\{U(y)\,T_y U(y)\right\}_+ - \left\{U(y)\,T_y U(y)\right\}_-\,\right] d_y\sigma,$$

где положительно определенная форма E (U, U) определена в [1, с. 109], а $\{U(y)\,T_yU(y)\}_{\mp}$ обозначает предельные значения $U(x)\,T_xU(x)$ при подходе точки x по направлению положительной и отрицательной нормалей соответственно к поверхности σ.

Перейдем к доказательству существования решений задач I, II.

Пусть $\Phi(x,y)$ — матрица фундаментальных решений уравнений м.т.у. в двулистном римановом пространстве R с линией ветвления γ, а R_1 и R_2 — листы этого пространства с границей $\sigma^+ \cup \sigma^-$.

Рассмотрим следующие двузначные потенциалы:

$$W^{\pm}(x) = \int_\sigma [T_y\Phi(y_{\pm}, x)]'\mu^{\pm}(y)\,d_y\sigma; \tag{1}$$

$$U^{\pm}(x) = \int_\sigma \Phi(x, y_{\pm})\,\nu^{\pm}(y)\,d_y\sigma, \tag{2}$$

где $\mu^{\pm}(y)$, $\nu^{\pm}(y)$ — неизвестные плотности класса $C^{0,\beta}(\sigma)$, а $T_y\Phi(y_+, x)$, $\Phi(x, y_+)$, $T_y\Phi(y_-, x)$, $\Phi(x, y_-)$ обозначают предельные значения $T_y\Phi(y,x)$ и $\Phi(x,y)$ при приближении точки y к σ из R_1 по направлению положительной и отрицательной нормалей.

Используя свойства матрицы $\Phi(x,y)$ в пространстве R для потенциалов (1), (2), получим следующие формулы "скачка":

$$\begin{cases}
[W^+(z)]^{R_1(R_2)}_{+(-)} = (\mp)\,\mu^+(z)\;(\overset{+}{+})\int_\sigma [T_y\Phi(y_+, z_+)]'\mu^+(y)\,d_y\sigma;\\
[W^+(z)]^{R_1}_{-} = [W^+(z)]^{R_2}_{+} = \int_\sigma [T_y\Phi(y_+, z_-)]'\mu^+(y)\,d_y\sigma;\\
[W^-(z)]^{R_1(R_2)}_{-(+)} = (\overset{+}{-})\,\mu^-(z)\;(\overset{+}{+})\int_\sigma [T_y\Phi(y_-, z_-)]'\mu^-(y)\,d_y\sigma;\\
[W^-(z)]^{R_1}_{-} = [W^-(z)]^{R_2}_{-} = \int_\sigma [T_y\Phi(y_-, z_+)]'\mu^-(y)\,d_y\sigma;
\end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases}
[T_zU^+(z)]^{R_1(R_2)}_{+(-)} = (\overset{+}{-})\,\nu^+(z)\;(\overset{+}{+})\int_\sigma T_z\Phi(z_+, y_+)\,\nu^+(y)\,d_y\sigma;\\
[T_zU^+(z)]^{R_1}_{-} = [T_zU^+(z)]^{R_2}_{+} = \int_\sigma T_z\Phi(z_-, y_+)\,\nu^-(y)\,d_y\sigma;\\
[T_zU^-(z)]^{R_1(R_2)}_{-(+)} = (\overset{-}{+})\,\nu^-(z)\;(\overset{+}{+})\int_\sigma T_z\Phi(z_-, y_-)\,\nu^-(y)\,d_y\sigma;\\
[T_zU^-(z)]^{R_1}_{+} = [T_zU^-(z)]^{R_2}_{-} = \int_\sigma T_z\Phi(z_+, y_-)\,\nu^-(y)\,d_y\sigma.
\end{cases} \tag{4}$$

Выражение $[W^+(z)]^{R_1}_{-}$ обозначает предельное значение $W^+(z)$ при подходе точки x к поверхности σ из области R_1 по направлению отрицательной нормали. Запись со скобками обозначает, что надо отдельно читать от знака, стоящего без скобок, и отдельно — для знака, стоящего в скобках. Аналогично понимаются и другие записи.

Решение задачи I ищется в виде

$$U(x) = \overset{+}{W}(x) + W^{-}(x). \tag{5}$$

Используя формы (3) для области R_1 и краевые условия, приходим к эквивалентной для задачи I системе сингулярных интегральных уравнений

$$-\mu^{+}(z) + \int_{\sigma} [T_y\Phi(y_+, z_+)]'\mu^{+}(y)\,d_y\sigma + \int_{\sigma} [T_y\Phi(y_-, z_+)]'\mu^{-}(y)\,d_y\sigma = $$
$$= f^{+}(z); \tag{6}$$

$$\mu^{-}(z) + \int_{\sigma} [T_y\Phi(y_+, z_-]'\mu^{+}(y)\,d_y\sigma + \int_{\sigma} [T_y\Phi(y_-, z_-)]'\mu^{-}(y)\,d_y\sigma = $$
$$= \bar{f}(z).$$

Решение задачи II ищется в виде

$$U(x) = U^{+}(x) + U^{-}(x), \tag{7}$$

и аналогично получаем систему сингулярных интегральных уравнений

$$\nu^{+}(z) + \int_{\sigma} [T_z\Phi(z_+, y_+)]\nu^{+}(y)\,d_y\sigma + \int_{\sigma} [T_z\Phi(z_+, y_-)]\nu^{-}(y)\,d_y\sigma = $$
$$= f^{+}(z); \tag{8}$$

$$-\nu^{-}(z) + \int_{\sigma} [T_z\Phi(z_-, y_+)]\nu^{+}(y)\,d_y\sigma + \int [T_z\Phi(z_-, y_-)]\nu^{-}(y)\,d_y\sigma = $$
$$= f^{-}(z).$$

Т е о р е м а 1. Операторы, порожденные левыми частями уравнений (6), (8), фредгольмовы в пространстве $L_p(\sigma)$ и всякое решение систем (6), (8), класса $L_p(\sigma)$ принадлежат классу $C^{0,\beta}(\sigma)$.

Доказательство этого факта проводится по схеме [1, с. 353–355].

Таким образом для уравнений (6), (8) справедливы теоремы Фредгольма в пространстве $C^{0,\beta}(\sigma)$.

Совершенно аналогично можно привести к интегральным уравнениям задачи I и II в области R_2. При этом оказывается, что интегральные уравнения задачи I в области R_2 сопряжены с интегральными уравнениями задачи II для R_1 и что задача II для R_1 приводит к интегральным уравнениям, сопряженным с интегральными уравнениями задачи II для области R_2.

Для исследования разрешимости интегральных уравнений (6), (8) достаточно исследовать интегральные уравнения задачи II с нулевыми граничными условиями как для области R_1, так и для области R_2, т.е. достаточно исследовать системы

$$\nu^{+}(z) + \lambda\int_{\sigma} [T_z\Phi(z_+, y_+)]\nu^{+}(y)\,d_y\sigma + \lambda\int_{\sigma} [T_z\Phi(z_+, y_-)]\nu^{-}(y)\,d_y\sigma = $$
$$= 0;$$
$$-\nu^{-}(z) + \lambda\int_{\sigma} [T_z\Phi(z_-, y_+)]\nu^{+}(y)\,d_y\sigma + \lambda\int_{\sigma} [T_z\Phi(z_-, y_-)]\nu^{-}(y)\,d_y\sigma = $$
$$= 0 \tag{9}$$

при параметре $\lambda = 1$, что соответствует задаче II с нулевыми граничными значениями для области R_1, и $\lambda = -1$, что соответствует задаче II с нулевыми граничными значениями для области R_2. Обозначим эти системы при таких параметрах λ соответственно через I_+ и I_-.

Теорема 2. Однородные интегральные уравнения I_+ и I_- имеют только тривиальные решения в классе $C^{0,\beta}(\sigma)$.

Допустим противное, пусть, например I_+ имеет нетривиальное решение $\nu(z) = (\nu^+(z), \nu^-(z)$ класса $C^{0,\beta}(\sigma)$. Тогда вектор $U(x)$, определенный по формуле (7), является решением уравнений м.т.у. в областях R_1 и R_2, кроме того $[T_zU(z)]_+^{R_1} = [T_zU(z)]_-^{R_1} = 0$. Из формулы Грина для области R_1

$$\int_{R_1} E(U,U)\,dx = \int_{\sigma^+}[U(y)T_yU(y)]_+^{R_1} d_y\sigma - \int_{\sigma^-}[U(y)T_yU(y)]_-^{R_1} d_y\sigma$$

вытекает, что $U(x) \equiv 0 \quad \forall\ x \in R_1 \cup \sigma$. Но, как легко видеть, $[U(z)]_+^{R_1} = [U(z)]_-^{R_2}$ и $[U(z)]_-^{R_1} = [U(z)]_+^{R_2}$. Поэтому из формулы Грина для области R_2 следует, что $U(x) \equiv 0\ \forall\ x \in R_2 \cup \sigma$.

Итак,

$$[T_zU(z)]_{+(+)}^{R_1(R_2)} = [T_zU(z)]_{-(-)}^{R_1(R_2)} = 0.$$

Так как

$$[T_z\ U(z)]_{+(-)}^{R_1(R_2)} = \overset{+}{(-)}\,\nu^+(z)\ \overset{+}{(+)}\int_\sigma [T_z\Phi(z_+,y_+)]\nu^+(y)\,d_y\sigma\ \overset{+}{(+)} \times$$

$$\times \int_\sigma [T_z\Phi(z_+,y_-)]\,\nu^-(y)\,d_y\sigma = 0;$$

$$[T_zU(z)]_{-(+)}^{R_1(R_2)} = \overset{-}{(+)}\,\overline{\nu}(z)\ \overset{+}{(+)}\int_\sigma [T_z\Phi(z_-,y_-)]\nu^-(y)\,d_y\sigma\ \overset{+}{(+)} \times$$

$$\times \int_\sigma [T_z\Phi(z_-,y_+)]\,\nu^+(y)\,d_y\sigma = 0,$$

то

$$2\nu^+(z) = [T_zU(z)]_+^{R_1} - [T_zU(z)]_-^{R_2} = 0;$$

$$2\nu^-(z) = [T_zU(z)]_+^{R_2} - [T_zU(z)]_-^{R_1} = 0,$$

т.е. $\nu^+(z) = \nu^-(z) = 0$.

Из теорем 1, 2 следует теорема.

Теорема 3. Задачи I, II имеют единственные решения для любых f^+ и f^-. Для задачи II решение дается формулой (7), $x \in R_1$, где $(\nu^+(y), \nu^-(y)$ — решение интегральных уравнений (8). Если $\sigma \in Л_2(a)$, а $f^\pm \in C^{1,\beta}(\sigma)$, то решение задачи I дается формулой (5), $x \in R_1$, где $(\mu^+(y), \mu^-(y)$ является решением системы (6).

Используя известную схему [2] доказывается следующая теорема.

Т е о р е м а 4. Собственные числа системы (9) действительны и по модулю строго больше единицы. Полюсы резольвенты простые.

Л и т е р а т у р а

1. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости/ В.Д. Купрадзе, Т.Г. Гегелиа, М.О. Башелейшвили, Т.В. Бурчуладзе. — М.: Наука, 1976. —663 с.
2. Г у р с а Э. Курс математического анализа. — М. — Л.: ОНТИ, т. 3, ч. II, 1934. — 318 с.

УДК 532.546:519.3

М.М. Чепинога, канд.физ.-мат.наук, доцент (БГУ)

НЕКОТОРЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

В работе рассмотрены следующие пространственные стационарные задачи теории фильтрации.

1. Движение несжимаемой жидкости в изотропном грунте при нелинейной зависимости общего вида между скоростью фильтрации $\bar{v}$ и пьезометрическим уклоном $\bar{I}$.

2. Аналогичная задача в случае двухслойного грунта.

3. Движение сжимаемой жидкости в анизотропной пористой среде.

Показано, что первые две задачи (являющиеся существенно нелинейными) имеют вариационную формулировку и могут быть решены прямыми методами вариационного исчисления.

Третья задача (являющаяся также нелинейной) при помощи преобразований приводится к линейной задаче, исследованной атвором в [4]. В частном случае однородной изотропной среды эта задача приводится к известной смешанной задаче для гармонической функции.

1. Движение несжимаемой жидкости в изотропном грунте. Из опытов известно, что при движении жидкости в грунте скорость фильтрации $\bar{v}$ является функцией пьезометрического уклона $\bar{I}$ [1]. В простейшем случае принимают линейную зависимость $\bar{v}= -k\bar{I}$ (закон Дарси). Для крупнозернистых грунтов или при больших скоростях движения (число Рейнольдса больше 10) зависимость $\bar{v}$ от $\bar{I}$ будет нелинейной. С.А. Христианович рассмотрел нелинейную плоскую задачу, считая $\bar{I} = -\frac{\Phi(v)}{v}\bar{v}$ [2].

В настоящем разделе изучается пространственная стационарная фильтрация несжимаемой жидкости при нелинейной зависимости $\bar{v}$ от $\bar{I}$ общего вида [1]

$$\bar{v} = -\kappa(a)\bar{I}\,;\quad a = I^2\,;\quad \bar{I} = \operatorname{grad} h, \tag{1.1}$$

где $\kappa(a) > 0$ есть известная дифференцируемая функция, определяемая экспериментально. В силу несжимаемости

$$\operatorname{div}\bar{v} = 0. \tag{1.2}$$