

отобранных для решения задачи. Затем осуществляется запрос о необходимости продолжения работы. Дальнейшее выполнение задания можно прекратить, если сгенерированная программа или конфигурация области интегрирования не удовлетворяет пользователя. Подключение модулей к программному алгоритму решения задачи производится средствами РЕДАКТОРА ОС ЕС. Затем управление передается сгенерированной программе.

Блок 6 содержит программы вывода результатов вычислений на печать в виде графиков и таблиц.

В настоящее время производится пополнение комплекса за счет включения новых программ и расширения функциональных возможностей уже имеющихся.

Л и т е р а т у р а

1. Я н е н к о М.Н., К а р н а ч у к В.И., К о н о в а л о в А.Н. Проблемы математической технологии. — В сб.: Численные методы механики сплошной среды, Новосибирск, т. 8, № 3, 1977, с. 129–157. 2. М а р т ы н е н к о М.Д., К н я з е в а Л.П., Р о м а н ч и к В.С. Комплекс программ решения контактных задач для упругого полупространства: Материалы VI Всесоюзного семинара по комплексам программ математической физики. — Новосибирск, 1980, с. 227–233. 3. Р о м а н ч и к В.С. Решение некоторых смешанных пространственных задач теории упругости методом интегральных уравнений: Автор. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Минск: БГУ, 1978. — 21 с. 4. М а р т ы н е н к о М.Д., Р о м а н ч и к В.С. Об одном методе решения основного интегрального уравнения контактной задачи теории упругости. — Весті АН БССР. Сер. физ.-мат., 1977, № 3. с. 42–47.

УДК 539.3

В.М. Романчак, аспирант
(БГУ)

О НЕКОТОРЫХ СООТНОШЕНИЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КОНТУРА С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ

В [1] для точек, не лежащих в окрестности угловых, рассматривается некоторое интегральное уравнение. В окрестности каждой угловой точки неизвестная функция представляется в виде суммы частного решения и собственной функции. Для определения коэффициента при собственной функции строится уравнение на основании формулы Бетти. В предлагаемой работе это уравнение рассматривается в другой форме. Для точек, не лежащих в окрестности угловой, предлагается использовать уравнение Н.И. Мухелишвили [2]. Обзор литературы по интегральным уравнениям для плоских задач теории упругости для областей с угловыми точками содержится в [3].

Рассмотрим первую основную задачу для конечной односвязной области D , ограниченной кусочно-гладким контуром L , с конечным числом угловых точек. Посредством аналитических функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ компоненты напряжений выражаются в следующей форме:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \varphi'(z); \quad (1)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)].$$

Граничное условие запишем в виде

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) + C, \quad (2)$$

где $t \in L$, $f(t)$ — известная функция; C — некоторая константа.

Рассмотрим поведение функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в окрестности угловых точек. Для простоты обозначения будем считать, что угловая точка z_0 находится в начале координат, и угол между предельными положениями касательных при приближении к этой точке по дуге L слева и справа и действительной осью равен a и $-a$ соответственно. Путем замены координат [2] все результаты, полученные ниже, распространяются на общий случай.

Пусть $N=1$. Допустим, что функцию $f(t)$ на L в окрестности z_0 можно представить в виде

$$\overline{f(t)} = \overline{f(z_0)} + \sum_{j=1}^m [r_{j1}(t)t^{\gamma_j} + \overline{r_{j2}(t)t^{\bar{\gamma}_j}}] + f_0(t), \quad (3)$$

где γ_j — комплексные числа; $\operatorname{Re}(\gamma_{j+1} - \gamma_j) > 0$; $\operatorname{Re}\gamma_m \leq N$; $\operatorname{Re}\gamma_1 \geq 0$;

$$\lim_{t \rightarrow z_0} f_0'(t) = 0.$$

Функции $r_{j1}(t)$ и $r_{j2}(t)$ принимают постоянные значения в левой (правой) окрестности угловой точки z_0 и испытывают скачок, при переходе через угловую точку в положительном направлении, Δc_{j1} и Δc_{j2} соответственно. Считаем, что функция $\varphi(z)$ в окрестности угловой точки допускает представление вида

$$\varphi(z) = \varphi'(z_0) + \sum_{j=1}^n (a_{j1}z^{\lambda_j} + \bar{a}_{j2}z^{\bar{\lambda}_j}) + \varphi_0(z), \quad (4)$$

где $\lambda_j, a_{j1}, a_{j2}$ — некоторые комплексные константы; $\{\gamma_j\} \subset \{\lambda_j\}$, $\operatorname{Re}(\lambda_{j+1} - \lambda_j) > 0$, $\operatorname{Re}\lambda_n \leq N$, $\operatorname{Re}\lambda_1 > 0$, $\varphi_0(z)$ — некоторая аналитическая функция, причем $\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi_0'(z) = 0$.

$$z \rightarrow z_0$$

Из (2) на основании (3), (4) следует, что функция $\psi(z)$ имеет представление в некоторой окрестности z_0 на L вида

$$\psi(t) = \psi(z_0) + \sum_{j=1}^n (b_{j1}t^{\lambda_j} + \bar{b}_{j2}t^{\bar{\lambda}_j}) + \psi_0(t), \quad (5)$$

где $\lim_{t \rightarrow z_0} \psi_0'(t) = 0$. Из возможности аналитического продолжения (5) в ок-

рестности угловой точки вытекает постоянство b_{j1}, b_{j2} слева и справа от z_0 на L . Для доказательства достаточно продифференцировать (5), затем выразить полученную аналитическую функцию с помощью интеграла типа Коши, имеющего особенность [4].

Из граничного условия (2) b_{ji} определяется по формулам (индекс j в коэффициентах $r_{ji}(t), \lambda_j, a_{ji}, b_{ji}, \Delta c_{ji}$ в дальнейшем опускаем):

$$\begin{aligned} b_1 &= -a_2 e^{-2i\lambda a} - \lambda a_1 e^{-2ia} + r_1(t); \\ b_2 &= -a_1 e^{+2i\lambda a} - \lambda a_2 e^{2ia} + r_2(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Требование постоянства b_1, b_2 приводит к дополнительным уравнениям для определения a_1, a_2 :

$$\begin{aligned} a_2 \sin 2\lambda a + \lambda a_1 \sin 2a &= i\Delta c_1/2; \\ \lambda a_2 \sin 2a + a_1 \sin 2\lambda a &= -i\Delta c_2/2. \end{aligned} \quad (7)$$

В этом случае определитель системы (6) $D_{11}(\lambda) = \sin^2 2\lambda a - \lambda^2 \frac{2}{\sin^2 2a}$ считаем отличным от нуля.

Отметим, что при другом представлении (3) и соответственно (4) можно аналогично получить и другие комбинации частных решений.

Пусть теперь $D_{11}(\lambda) = \sin^2 2\lambda a - \lambda^2 \frac{2}{\sin^2 2a} = 0$. Полагая для простоты $\Delta c_1 = 0, \Delta c_2 = 0$, получим

$$b_1 = \pm b_2; \quad a_1 = \pm a_2; \quad (8)$$

$$-b_1 = (\pm \cos 2\lambda a + \lambda \cos 2a) a_1,$$

где знаки "+" и "-" относятся к корню λ уравнения

$$\sin 2\lambda a + \lambda \sin 2a = 0 \quad (9)$$

или уравнения

$$\sin 2\lambda a - \lambda \sin 2a = 0 \quad (10)$$

соответственно.

Отметим, что коэффициенты собственных функций в этом случае пока не определены. Для их определения применим методику [1]. Пусть Q — некоторый замкнутый контур, ограничивающий область Ω , а $\chi_i(z), \eta_i(z)$ — аналитические функции в этой области, имеющие непрерывные производные. Тогда нетрудно показать [5], что

$$\operatorname{Im} \left(\int_Q \chi_1(t) d\overline{g_2(t)} + \int_Q g_1(t) d\chi_2(t) \right) = 0, \quad (11)$$

где $g_i(t) = \chi_i(t) + t \overline{\chi_i'(t)} + \overline{\eta_i(t)}$.

Пусть $\eta_2(z)$ и $\chi_2(z)$ – аналитические функции, для которых в окрестности угловой точки z_0 справедливы представления:

$$\begin{aligned} \eta_2(z) &= lz^{-\lambda} \pm \bar{l}z^{-\bar{\lambda}} + \eta_0(z); \\ \chi_2(z) &= kz^{-\lambda} \pm \bar{k}z^{-\bar{\lambda}} + \chi_0(z), \end{aligned} \quad (12)$$

где $-k = (\pm \cos 2\lambda + \lambda \cos 2\alpha) l$; $\chi_0(z), \eta_0(z)$ – непрерывные вплоть до границы функции; k – некоторое комплексное число; λ – собственное число определителя (9) или (10).

Образует замкнутый контур S_ε из дуги окружности радиуса ε , охватывающей угловую точку, и из примыкающей большей части контура L . В качестве контура Q в формуле (11) возьмем контур S_ε . Применим теперь (11) к искомому набору функций $\varphi(z), \psi(z)$ и некоторым известным функциям $\eta_2(z), \chi_2(z)$, для которых справедливо представление (12). Теперь перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, используя асимптотические представления (4), (5), (11) с учетом (8). Получим

$$4\operatorname{Re} \lambda D_1'(\lambda) a_1 = \operatorname{Im} \left(\int_L \eta_2(t) d\bar{f}(t) + \int_L \bar{g}(t) \Phi(t) dt \right). \quad (13)$$

$$\text{Здесь } D_1'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} (\lambda \sin 2\alpha \pm \sin 2\lambda\alpha) = \pm 2\alpha \cos 2\lambda\alpha + \sin 2\alpha;$$

$$\Phi(z) = \varphi'(z); \quad g(t) = \overline{\chi_2(t)} + t\overline{\chi_2'(t)} + \overline{\eta_2(t)}.$$

Полагая в формуле (13) $k = 1$ и $k = i$, получим действительную и мнимую часть коэффициента a_1 .

Интегрируя по частям и дифференцируя по переменной \bar{t} уравнение Н.И. Мухелишвили [4], получим

$$\begin{aligned} \overline{\Phi(t)} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\Phi(\tau)} \frac{d}{dt} \left(\ln \frac{\bar{\tau} - \bar{t}}{\tau - t} \right) d\bar{\tau} - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_L \Phi(\tau) \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{\tau} - \bar{t}}{\tau - t} \right) d\tau = A^1(t). \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{Здесь } A^1(t) = \frac{\bar{f}'(t)}{2} - \frac{1}{2\pi i} \frac{dt}{dt} \int_L \frac{\bar{f}'(\tau) d\bar{\tau}}{\tau - t}.$$

Для точек, не попадающих в окрестность угловых, будем использовать уравнение (14), а для остальных точек – представление в виде суммы частного решения и собственных функций. Коэффициенты собственных функций определяются по формулам, аналогичным (13). Теперь можно применить численную методику работы [1].

Л и т е р а т у р а

1. Barone M.R., Robinson A.R. Determination of elastic stresses at notches and corners by integral equations. — *Int. J. Solids and Struct.*, 1972, **8**, № 11, с. 1319–1338.
2. М у с х е л и ш в и л и Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — 5-е изд. — М.: Наука, 1966. — 708 с. 3. П а р т о н В.В., П е р л и н П.И. Интегральные уравнения теории упругости. — М.: Наука, 1977. — 312 с. 4. М у с х е л и ш в и л и Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. — 3-е изд. — М.: Наука, 1968. — 512 с.
5. H a n s F. Bueckner. Field singularities and related integral representations. — In: *Mecan. fracture I. Methods of analysis and solutions of crack problems* Ed. G.C. Sih. Leyden Noordhoff Int. Publ. Co., 1973, с. 239–314.

УДК 539.1

Д.Г. Медведев, механик (БГУ),
О.Н. Скляр, ассистент (БПИ)

ОБ ОБЩЕМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛАМЕ В ОБЛАСТЯХ С НЕРЕГУЛЯРНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Определение напряженно-деформированного состояния упругих тел связано с решением граничных задач для системы трех дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка (системы уравнений Ламе), которые имеют довольно сложную структуру. Сложность этой системы заключается в том, что каждое из входящих в нее уравнений содержит три неизвестные функции, причем для определения этих функций нельзя сформулировать конкретную граничную задачу. Известно только, что при определенных предположениях (массовые силы отсутствуют, материал тела изотропен) каждая из компонент вектора перемещения является бигармонической функцией. Этот факт стимулировал появление различных работ по исследованию структуры общих решений системы Ламе. Такие структуры известны в литературе в виде представлений Папковича, Галеркина, Нейбера и др. Методы получения таких структур (общих представлений решений) носят чисто формальный характер и никак не связаны с геометрией области, в которой ищется решение системы Ламе [1].

В настоящей работе предлагается метод получения общих представлений решений задач упругости, основанный на использовании интегральных представлений решений соответствующих граничных задач.

Поскольку такие интегральные представления естественным образом связаны с областью, в которой ищется решение, то предложенный в работе метод позволяет увязать получаемое интегральное представление с требуемой гладкостью искомого решения в зависимости от гладкости граничной поверхности.

Систему уравнений Ламе можно записать в следующем виде:

$$A \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \vec{u} + \vec{F} = 0, \quad (1)$$