

А.Х. Ким, докт.техн.наук, профессор,  
Н.Н. Флусов, аспирант  
(БПИ)

**КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОАКСИАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК  
ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ ДЕФОРМАЦИИ**

Рассматривается процесс высокоскоростного упруго-пластического осесимметричного взаимодействия двух цилиндрических оболочек (рис. 1) в условиях плоского деформированного состояния. В упрощенной постановке подобная задача решена в [1].

В представленной работе предполагается, что внешняя оболочка (II), заключенная в абсолютно жесткую обойму (III), представляет из себя толстую трубу и в процессе деформирования испытывает малые упруго-пластические деформации. Внутренняя оболочка (I) вставлена во внешнюю с некоторым определенным зазором ( $\delta$ ), относится к классу тонких оболочек и испытывает высокоскоростные большие упруго-пластические деформации. Условие пластичности принимается в форме Мизеса [2]. Реологические соотношения при больших скоростях деформации берутся в виде, предложенном в [3].

1. Радиальное движение оболочки I под действием внутреннего давления до момента времени  $t_1$ , встречи с оболочкой II, описывается уравнением

$$\rho h \ddot{r} = p(t) - \sigma_{\theta} h_1 / r, \quad (1.1)$$

где  $\rho$  – плотность материала оболочки I;  $h_1$  – текущая толщина оболочки I;  $r$  – текущее значение среднего радиуса оболочки I;  $p(t)$  – функция внутреннего давления.

Предполагается, что во все время движения оболочки выполняются условия:  $\sigma_r = 0$ ;  $\epsilon_z = 0$ ;  $\epsilon_r + \epsilon_{\theta} = 0$ .

Тогда в области упругого деформирования

$$\sigma_{\theta} = \frac{4}{3} E_1 \ln \frac{r}{R_1} \quad (1.2)$$

Здесь  $E_1$  – модуль упругости оболочки I.

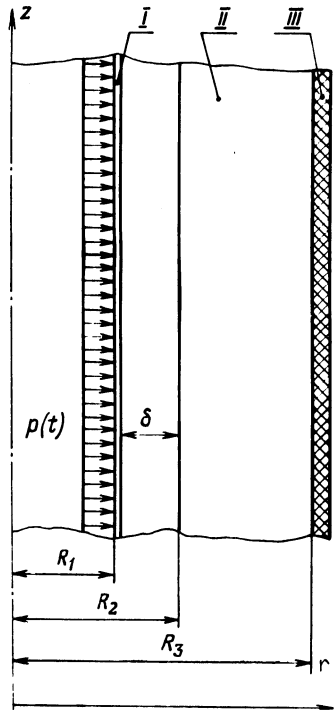


Рис. 1.

При выполнении условия пластичности Мизеса

$$\sigma_{\theta} = \frac{2\sigma_{sd}}{\sqrt{3}}, \quad (1.3)$$

где  $\sigma_{sd}$  – динамический предел текучести [4], оболочка I испытывает пластические деформации.

Зависимость между напряжением  $\sigma_{\theta}$  и деформацией ( $\epsilon'_{\theta} = \ln \frac{r}{R_1}$ ) в пластической области имеет вид

$$\sigma_{\theta} = \frac{4}{3} E_1 \epsilon_{\theta} \left[ 1 - \lambda \left( 1 - \frac{\sqrt{3} \sigma_{sd}}{2 E_1 \epsilon_{\theta}} \right) \right] \quad (1.4)$$

( $\lambda$  – параметр упрочнения).

Уравнение движения оболочки в пластической области

$$\ddot{r} + \frac{4E_1}{3\rho r} \ln \frac{r}{R_1} = \frac{4E_1 \lambda}{3\rho r} \left( \ln \frac{r}{R_1} - \frac{\sqrt{3} \sigma_{sd}}{2E_1} \right) + \frac{p(t)}{\rho h_1}. \quad (1.5)$$

В качестве начальных условий используются решения уравнения (1.1) в момент выполнения (1.3).

2. Как известно [5], напряжения и перемещения в толстой трубе в области упругого деформирования при плоском деформированном состоянии можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(e)} &= \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \left( A - \frac{B}{r^2} \right); \\ \sigma_{\theta}^{(e)} &= \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \left( A + \frac{B}{r^2} \right); \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$u_r^{(e)} = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}E_2} \left[ (1 - \nu - 2\nu^2) A + (1 + \nu) \frac{B}{r^2} \right] r$$

в области пластического деформирования при условии текучести Мизеса [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(p)} &= \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \left( \ln \frac{r}{R_T} + C \right); \\ \sigma_{\theta}^{(p)} &= \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \left( \ln \frac{r}{R_T} + C + 1 \right); \quad u_r^{(p)} = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}E_2} \cdot \frac{B}{r}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $\sigma_T$  – статический предел текучести материала оболочки II. Граничные условия, необходимые для определения неизвестных постоянных (A, B, C, D) и радиуса пластической области  $R_T$  имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(p)} \\ u_r^{(e)} \end{aligned} \right|_{r=R_2} = -\frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} f; \quad \left. u_r^{(e)} \right|_{r=R_3} = 0; \quad (2.3)$$

$$[\sigma_r] \Big|_{r=R_T} = [\sigma_\theta] \Big|_{r=R_1} = [u_r] \Big|_{r=R_T} = 0,$$

где  $f$  – неизвестная безразмерная функция контактного давления.

Решение  $D$  системы линейных алгебраических уравнений, получающейся при подстановке (2.1), (2.2) в (2.3), имеет вид

$$D = \frac{R_T^2}{2} [1 + \nu - (1 - \nu - 2\nu^2) (\ln(\frac{R_2}{R_T})^2 - 1 + 2f)], \quad (2.4)$$

при этом  $R_T^2$  определяется из нелинейного уравнения

$$\frac{1 + \nu}{1 - \nu - 2\nu^2} \cdot (\frac{R_T}{R_3})^2 - \ln(\frac{R_2}{R_T})^2 + 1 - 2f = 0. \quad (2.5)$$

Таким образом, в области пластического деформирования перемещение является нелинейной функцией от контактного давления

$$u_2 = u_2(f), \quad (2.6)$$

в области упругого деформирования ( $f \leq f_{\min}$ ) указанная функция является линейной

$$u_2 = Kf, \quad (2.7)$$

где

$$K = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}E_2} \cdot \frac{(1 + \nu)(1 - \nu - 2\nu^2)(R_3^2 - R_2^2)}{R_3^2(1 - \nu - 2\nu^2) + R_2^2(1 + \nu)} \cdot R_2.$$

Минимальное давление, необходимое для начала пластического деформирования оболочки, можно определить из (2.5), положив  $R_T = R_2$ :

$$f_{\min} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( \frac{R_2}{R_3} \right)^2 - \frac{1 + \nu}{1 - \nu - 2\nu^2} \right]. \quad (2.8)$$

3. Уравнение движения оболочки I в контакте с оболочкой II имеет вид

$$\ddot{r} + \sigma_\theta / r \rho = (p_1 - \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} f) / \rho h_1, \quad (3.1)$$

где  $\sigma_\theta$  – определяется формулой (1.4);  $p_1(t) = p(t)H(t-t_1)$ ;  $H(t)$  – функция Хевисайда.

Линеаризуя (3.1) в окрестности  $R = R_1 + \delta$ , получим

$$\ddot{u}_1 + a_1^2 u_1 = \beta_1 H(t) + (p_1 - \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} f) / \rho h_1. \quad (3.2)$$

Здесь  $u_1 = r - R$ ;

$$a_1^2 = 4 E_1 (1 - \lambda) / 3 \rho R^2 ;$$

$$\beta_1 = -a_1^2 R \left( \ln \left( 1 + \frac{\delta}{R_1} \right) + \frac{\sqrt{3} \lambda \sigma_{sd}}{2 (1 - \lambda) E_1} \right) .$$

Решение уравнения (3.2) при начальных условиях  $u_1(0) = 0, \dot{u}_1(0) = V$  — скорость оболочки I в момент  $t_1$ :

$$u_1 = \frac{V}{a_1} \sin a_1 t + \frac{\beta_1}{a_1^2} (\cos a_1 t - 1) + \frac{1}{\rho h_1 a_1} \int_0^t \left( p_1 - \frac{2\sigma_1}{\sqrt{3}} \right) f \sin a_1 (t - \tau) d\tau . \quad (3.3)$$

Условие совместности движения оболочек I и II имеет вид

$$(u_1 = u_2) \Big|_{r=R_2} . \quad (3.4)$$

Подстановка в это соотношение величин, определенных в (2.6) и (3.3), приводит к интегральному, в общем случае нелинейному, уравнению, из которого находится неизвестное контактное давление при нагрузке ( $\dot{u}_1 \geq 0$ ):

$$u_2(f) + \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3} \rho h_1 a_1} \int_0^t f \sin a_1 (t - \tau) d\tau = \frac{V}{a_1} \sin a_1 t + \frac{\beta_1}{a_1^2} (\cos a_1 t - 1) + \frac{1}{\rho h_1 a_1} \int_0^t p_1 \sin a_1 (t - \tau) d\tau . \quad (3.5)$$

При разгрузке движение оболочки I определяется уравнением

$$\ddot{u}_1 + \sigma_\theta / R_\rho = \left( p_2 - \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \right) / \rho h_1 . \quad (3.6)$$

Здесь  $\sigma_\theta = \sigma_\theta^* - \frac{4E_1}{3} \left( \frac{u_1}{R} - \varepsilon_\theta^* \right)$ ;  $p_2 = p_1 H(t - t_2)$ ;

$$\sigma_\theta^* = \sigma_\theta^*(t_2); \quad \varepsilon_\theta^* = \varepsilon_\theta^*(t_2); \quad u_1^* = u_1(t_2); \quad f_{\max} = f(t_2),$$

где  $t_2$  — время начала разгрузки ( $\dot{u}_1(t_2) \leq 0$ ).

Решение уравнения (3.6) при начальных условиях  $u_1(0) = u_1^*$ ;  $\dot{u}_1(0) = 0$  имеет вид

$$u_1 = u_1^* \cos a_2 t + \frac{\beta_2}{a_2^2} (\cos a_2 t - 1) + \frac{1}{\rho h_1 a_2} \int_0^t \left( p_2 - \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \right) f \sin a_2 (t - \tau) d\tau , \quad (3.7)$$

где  $a_2^2 = 4E_1/3\rho R^2$ ;  $\beta_2 = (\sigma_\theta^* - 4E_1 \varepsilon_\theta^* / 3) / \rho R$ .

Оболочка II при разгрузке движется по закону

$$u_2 = u_1^* - K (f_{\max} - f). \quad (3.8)$$

Подставляя (3.7) и (3.8) в условие совместности движения (3.4), получаем линейное интегральное уравнение Вольтерра II рода для определения контактного давления при разгрузке.

Методы решений уравнений подобного типа хорошо известны [6].

## Л и т е р а т у р а

1. Ко х м а н ю к С.С., Я н ю т и н Е.Г., Р о м а н е н к о Л.Г. Нестационарное взаимодействие двух цилиндрических коаксиальных оболочек. — Проблемы машиностроения, 1976, вып. 3, с. 50–55. 2. К а ч а н о в Л.М. Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969. — 420 с. 3. Ф и л и п п о в А.П., К о х м а н ю к С.С., Я н ю т и н Е.Г. Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок. — Киев: Наукова думка, 1978. — 182 с. 5. Т и м о ш е н к о С.П., Г у д ь е р Д.Я. Теория упругости. — М.: Наука, 1980. — 575 с. 6. К р а с н о в Л.М. Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1975. — 304 с.

УДК 539.3:534.1

**М.Д. Мартыненко**, докт.физ.-мат.наук, профессор,  
**Фам Дык Тинь**, студент  
(БГУ)

### СВОБОДНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ЛИНЕЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ, ЗАЦЕМЛЕННЫХ ПО КОНТУРУ

Расчет круглых пластин линейно-переменной толщины с начальной погибью срединной поверхности часто осуществляется на основании введения гипотезы о незначительном влиянии погиби на напряженное состояние, причем погрешность такой гипотезы не оценивается. В настоящей работе методом малого параметра получено приближенное выражение для собственных колебаний круглых заземленных пластин линейно-переменной толщины, срединная поверхность которых является прямым круговым конусом раствора  $\pi - 2\varphi_0$ , где  $\varphi_0 \ll 1$ .

Рассматриваются тонкие пластины, одна из ограничивающих поверхностей которых является плоскостью, а вторая — конической поверхностью. Предполагается, что толщина пластины меняется по закону

$$h(x) = h_0 \left[ 1 + \lambda \left( 2 \frac{x}{a} - 1 \right) \right], \quad (1)$$

где  $a$  — радиус пластины;  $x$  — координата, отсчитываемая от ее центра по направлению образующей срединной поверхности,  $h_0 = h \left( \frac{a}{2} \right) |\lambda| \ll 1$  (рис. 1).