

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2025-24-3-234-245>

УДК 534.131:534-8

Моделирование вынужденных колебаний концентраторов ультразвука на основе кольцевых упругих элементов

Докт. техн. наук, доц. Д. А. Степаненко¹⁾, асп. А. Н. Киндрук¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

Реферат. В статье рассмотрена методика моделирования вынужденных колебаний концентраторов ультразвука на основе кольцевых упругих элементов и составных колебательных систем на их основе. В основу моделирования положено решение неоднородного дифференциального уравнения вынужденных колебаний путем разложения в ряд по собственным функциям соответствующей однородной задачи. В результате получены выражения для коэффициента усиления колебаний по амплитуде и входного механического импеданса, позволяющие исследовать влияние конструктивных параметров на основные эксплуатационные характеристики колебательных систем, содержащих кольцевые концентраторы. Корректность полученных численных результатов подтверждается их сравнением с результатами моделирования с помощью метода конечных элементов. Показано, что составная колебательная система, состоящая из последовательно соединенных стержневого волновода и кольцевого концентратора, обеспечивает усиление колебаний по амплитуде при условии, что частоты антирезонанса элементов системы имеют близкие значения. Установлено, что коэффициент усиления составной колебательной системы может быть повышен за счет увеличения площади поперечного сечения стержневого волновода и/или волнового сопротивления его материала, а также за счет оптимального выбора величины рассогласования между частотами антирезонанса элементов системы. Также дается объяснение механизма усиления колебаний однородным кольцевым концентратором, основанное на анализе взаимодействия множества мод колебаний, возбуждаемых в концентраторе при его работе в окolorезонансном режиме.

Ключевые слова: ультразвуковые колебания, кольцевой концентратор, краевая задача, собственные частоты, вынужденные колебания

Для цитирования: Степаненко, Д. А. Моделирование вынужденных колебаний концентраторов ультразвука на основе кольцевых упругих элементов / Д. А. Степаненко, А. Н. Киндрук // *Наука и техника*. 2025. Т. 24, № 3. С. 234–245. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2025-24-3-234-245>

Modelling of Forced Vibrations of Ultrasound Concentrators Based on Ring-Shaped Elastic Elements

D. A. Stepanenko¹⁾, A. N. Kindruk¹⁾

¹⁾Belarussian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The article considers methodology for modelling forced vibrations of ultrasound concentrators based on ring-shaped elastic elements and compound vibratory systems including such concentrators. As a background for modelling we used solution of non-homogeneous differential equation of forced vibrations based on series expansion by eigenfunctions of the corresponding homogeneous problem. As a result we obtained expressions for the gain factor of vibrations amplitude and the input mechanical impedance allowing to study the effect of design parameters on the main operational characteristics of vibratory systems containing ring-shaped concentrators. The obtained numerical results are verified by comparing them to the results of modelling by means of finite element method. It is shown that a compound vibratory system consisting of serially connected bar waveguide and a ring-shaped concentrator enables gain of vibrations amplitude under condition that elements of the system have close values of anti-resonance frequencies. It has been determined that gain of a compound vibratory system can be improved by increasing

Адрес для переписки

Степаненко Дмитрий Александрович
Белорусский национальный технический университет
ул. Я. Коласа, 22,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 293-91-01
kipp@bntu.by

Address for correspondence

Stepanenko Dmitry A.
Belarussian National Technical University
22, Ya. Kolasa str.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 293-91-01
kipp@bntu.by

crosssectional area of the bar waveguide and/or specific acoustic impedance of its material, as well as by means of optimal choice of mismatch value between anti-resonant frequencies of the system elements. An explanation is also given of the mechanism of vibrations amplification by means of uniform ring-shaped concentrator based on an analysis of the interaction between plurality of vibration modes excited in concentrator in the case of its near-resonant operation.

Keywords: ultrasonic vibrations, ring-shaped concentrator, boundary value problem, natural frequencies, forced vibrations

For citation: Stepanenko D. A., Kindruk A. N. (2025) Modelling of Forced Vibrations of Ultrasound Concentrators Based on Ring-Shaped Elastic Elements. *Science and Technique*. 24 (3), 234–245. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2025-24-3-234-245> (in Russian)

Введение

Усиление ультразвуковых колебаний по амплитуде, необходимое для успешного применения ультразвука в качестве средства интенсификации различных технологических процессов, может быть реализовано с помощью концентраторов в виде стержней с изменяющейся по длине продольной жесткостью и кольцевых концентраторов, усилительные свойства которых связаны с зависимостью изгибной жесткости кольцевого упругого элемента от угловой координаты [1, с. 100; 2; 3]. Конструктивно кольцевые концентраторы переменной жесткости могут быть выполнены в виде неравнотолщинных колец или колец с неравномерным распределением упругих свойств материала, например колец из функционально-градиентного материала или составных колец, изготовленных путем неразъемного соединения нескольких сегментов из материалов с различным по величине модулем упругости. Усилительными свойствами также обладают однородные кольцевые упругие элементы с не зависящей от угловой координаты изгибной жесткостью в случае их околорезонансного возбуждения, то есть при наличии рассогласования между собственной частотой колебаний концентратора и частотой вынуждающего воздействия, создаваемого возбудителем колебаний (пьезоэлектрическим преобразователем). Эффект усиления ультразвуковых колебаний по амплитуде с помощью однородных кольцевых упругих элементов наблюдался при моделировании с помощью метода конечных элементов (МКЭ) колебательной системы для кавитационного упрочнения цилиндрических поверхностей деталей приборов и машин [4], однако авторы цитируемого исследования не указывают в явной форме на существование этого эффекта. Также известно исследование, посвященное

применению однородных кольцевых упругих элементов в качестве вибрационных изоляторов [5]: его авторы отмечают, что в зависимости от начальной деформации упругого элемента и частоты возбуждения он может выполнять функцию как вибрационного изолятора со снижением амплитуды колебаний в выходном сечении, так и усилителя с увеличением амплитуды колебаний. Целями данной статьи являются теоретический анализ эффекта усиления колебаний по амплитуде однородными кольцевыми упругими элементами и разработка механико-математических моделей ультразвуковых колебательных систем на их основе.

Постановка и методика решения задачи

Собственные частоты изгибных колебаний симметричного кольцевого концентратора могут быть найдены путем решения обобщенной задачи Штурма – Лиувилля 6-го порядка [6]

$$L_1 v = \mu_i L_2 v \quad (1)$$

с периодическими граничными условиями:

$$v(0) = v(\pi) = 0, \quad \left. \frac{d^2 v}{d\phi^2} \right|_{\phi=0} = \left. \frac{d^2 v}{d\phi^2} \right|_{\phi=\pi} = 0;$$

$$\left. \frac{d^4 v}{d\phi^4} \right|_{\phi=0} = \left. \frac{d^4 v}{d\phi^4} \right|_{\phi=\pi} = 0,$$

где $v(\phi)$ – амплитуда тангенциальных колебательных смещений; $\phi \in [-\pi; \pi]$ – угловая координата, а собственные значения μ_i связаны с собственными частотами f_i соотношением

$$\mu_i = 4\pi^2 R^4 f_i^2,$$

R – радиус средней линии.

Дифференциальные операторы L_1 и L_2 в уравнении (1) определяются формулами:

$$L_1 = \frac{d^3}{d\phi^3} \left(EI \frac{d^3}{d\phi^3} \right) + 2 \frac{d^2}{d\phi^2} \left(EI \frac{d^2}{d\phi^2} \right) + \frac{d}{d\phi} \left(\left(EI + \frac{d^2(EI)}{d\phi^2} \right) \frac{d}{d\phi} \right); \quad (2)$$

$$L_2 = -\rho S + \frac{d}{d\phi} \left(\rho S \frac{d}{d\phi} \right), \quad (3)$$

где E – модуль продольной упругости материала; I – осевой момент инерции поперечного сечения; ρ – плотность материала; S – площадь поперечного сечения.

Выражения (2)–(3) записаны в общем виде, позволяющем применять уравнение (1) как для однородных концентраторов (с постоянными значениями E , I , ρ и S), так и для неоднородных концентраторов, для которых перечисленные параметры являются функциями угловой координаты.

Вынужденные колебания концентратора при воздействии гармонической вынуждающей силы с частотой f будут описываться неоднородным дифференциальным уравнением

$$L_1 v - \mu L_2 v = R^3 \frac{d\rho_F}{d\phi}, \quad (4)$$

где $\rho_F(\phi) = dF/d\phi$ – плотность распределения амплитуды вынуждающей силы $F(\phi)$, $\mu = 4\pi^2 R^4 f^2$.

Решение уравнения (4) может быть представлено в виде разложения по базисным функциям $v_i(\phi)$, являющимся собственными функциями задачи (1) [7, с. 421] и представляющим собой изгибные моды колебаний, соответствующие собственным частотам f_i :

$$v(\phi) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i v_i(\phi), \quad (5)$$

где коэффициенты a_i зависят от закона распределения вынуждающей силы (вида функции $\rho_F(\phi)$).

Для расчета коэффициентов a_i подставим ряд (5) в уравнение (4)

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i (L_1 v_i - \mu L_2 v_i) = R^3 \frac{d\rho_F}{d\phi},$$

или с учетом (1)

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i (\mu_i - \mu) L_2 v_i = R^3 \frac{d\rho_F}{d\phi}. \quad (6)$$

Собственные функции задачи Штурма – Лиувилля (1) удовлетворяют обобщенному условию ортогональности [8]

$$\int_{-\pi}^{\pi} v_n(\phi) L_2 v_i(\phi) d\phi = \delta_{ni} \int_{-\pi}^{\pi} v_n(\phi) L_2 v_n(\phi) d\phi, \quad (7)$$

где δ_{ni} – символ Кронекера.

Для дальнейшего анализа представим стоящую в правой части уравнения (6) функцию в виде разложения по функциям $L_2 v_i(\phi)$

$$\frac{d\rho_F}{d\phi} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i L_2 v_i(\phi). \quad (8)$$

Значения коэффициентов b_i могут быть определены путем умножения ряда (8) на базисную функцию $v_n(\phi)$ с последующим применением условия ортогональности (7)

$$b_n = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\rho_F}{d\phi} v_n(\phi) d\phi}{\int_{-\pi}^{\pi} v_n(\phi) L_2 v_n(\phi) d\phi} = - \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \rho_F(\phi) \frac{dv_n}{d\phi} d\phi}{\int_{-\pi}^{\pi} v_n(\phi) L_2 v_n(\phi) d\phi}.$$

Подставляя ряд (8) в правую часть уравнения (6) и почленно приравнивая правую и левую части, получим

$$a_i = \frac{R^3 \int_{-\pi}^{\pi} \rho_F(\phi) \frac{dv_i}{d\phi} d\phi}{(\mu - \mu_i) \int_{-\pi}^{\pi} v_i(\phi) L_2 v_i(\phi) d\phi}. \quad (9)$$

В случае сосредоточенной вынуждающей силы

$$\rho_F(\phi) = F_0 \delta(\phi),$$

где $\delta(\phi)$ – функция Дирака, выражение (9) принимает вид

$$a_i = \frac{F_0 R^3 \left. \frac{dv_i}{d\varphi} \right|_{\varphi=0}}{(\mu - \mu_i) \int_{-\pi}^{\pi} v_i(\varphi) L_2 v_i(\varphi) d\varphi}. \quad (10)$$

В случае однородного кольца собственные функции определяются выражением $v_i(\varphi) = \sin(i\varphi)$ и формула (10) записывается в виде

$$a_i = \frac{iF_0 R^3}{(i^2 + 1)\pi \rho S(\mu_i - \mu)} = \frac{iF_0}{4(i^2 + 1)\pi^3 R \rho S(f_i^2 - f^2)}. \quad (11)$$

В случае неоднородного кольца собственные функции задачи (1) могут быть в силу периодичности граничных условий разложены в ряд Фурье

$$v_i(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} \sin(k\varphi),$$

коэффициенты A_{ik} которого определяются методом гармонического баланса и зависят от вида функций $E(\varphi)$, $I(\varphi)$, $\rho(\varphi)$ и $S(\varphi)$ [9].

Уравнение (10) примет в этом случае вид

$$a_i = \frac{F_0 R^3 \sum_{k=1}^{\infty} k A_{ik}}{(\mu_i - \mu) \int_{-\pi}^{\pi} \rho S \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} \sin(k\varphi) \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 + 1) A_{ik} \sin(k\varphi) \right) d\varphi}. \quad (12)$$

Стоящее в знаменателе произведение рядов Фурье по синусам может быть представлено в виде ряда Фурье по косинусам

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} \sin(k\varphi) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 + 1) A_{ik} \sin(k\varphi) = \frac{1}{2} B_{i0} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{ik} \cos(k\varphi). \quad (13)$$

Для этого представим ряды, входящие в выражение (13), в комплексной форме:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} \sin(k\varphi) = -\frac{j}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{i|k|} \operatorname{sgn}(k) \exp(jk\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{ik}^{(1)} \exp(jk\varphi); \quad (14)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k^2 + 1) A_{ik} \sin(k\varphi) = -\frac{j}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k^2 + 1) A_{i|k|} \operatorname{sgn}(k) \exp(jk\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{ik}^{(2)} \exp(jk\varphi); \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} B_{i0} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{ik} \cos(k\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{i|k|} \exp(jk\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{ik} \exp(jk\varphi), \quad (16)$$

где j – мнимая единица.

Коэффициенты рядов (14)–(16) связаны между собой посредством дискретной свертки [9, 10]:

$$\begin{aligned} c_{ik} &= c_{ik}^{(1)} * c_{ik}^{(2)} = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} c_{k-k'}^{(1)} c_{k'}^{(2)} = -\frac{1}{4} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(k') \operatorname{sgn}(k-k') (k'^2 + 1) A_{i|k-k'|} A_{i|k-k'|} = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k'=1}^{\infty} (\operatorname{sgn}(k+k') A_{i|k+k'|} - \operatorname{sgn}(k-k') A_{i|k-k'|}) (k'^2 + 1) A_{ik'}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к коэффициентам B_{ik} , для которых $k \geq 0$, получим

$$B_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{k'=1}^{\infty} (A_{i,k+k'} - \operatorname{sgn}(k-k') A_{i|k-k'|}) (k'^2 + 1) A_{ik'}. \quad (17)$$

Аналог выражения (17) для непрерывных функций приводится в работе [11], где рассматривается обобщенное определение свертки, в котором интегрирование производится по неотрицательной части действительной оси:

$$h_1 * h_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty h_1(x') (\text{sgn}(x' - x) h_2(|x' - x|) + h_2(x' + x)) dx'$$

Использование такого обобщенного определения позволяет применять теорему Бореля о свертке, справедливую для обычного преобразования Фурье, для синус- и косинус-преобразований Фурье:

$$\mathcal{F}_c \{h_1 * h_2\} = \mathcal{F}_s \{h_1\} \cdot \mathcal{F}_s \{h_2\}, \quad (18)$$

где $\mathcal{F}_c \{h\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty h(x) \cos(\omega x) dx$ и $\mathcal{F}_s \{h\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty h(x) \sin(\omega x) dx$ – косинус- и синус-преобразования Фурье соответственно.

Если $h(x)$ – четная функция, то обращение ее косинус-преобразования Фурье производится по формуле

$$h(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \mathcal{F}_c \{h\} \cos(\omega x) d\omega = \mathcal{F}_c^{-1} \{ \mathcal{F}_c \{h\} \},$$

то есть для четных функций обратное косинус-преобразование Фурье совпадает по своей форме с прямым косинус-преобразованием Фурье, отличаясь заменой переменных $x \leftrightarrow \omega$.

Аналогичное утверждение справедливо для обратного синус-преобразования Фурье нечетных функций. Таким образом, если в выражении (18) функции $h_1(x)$ и $h_2(x)$ заменить функциями $g_1(\omega)$ и $g_2(\omega)$ частотной переменной ω , то выражение примет форму

$$\mathcal{F}_c^{-1} \{g_1 * g_2\} = \mathcal{F}_s^{-1} \{g_1\} \cdot \mathcal{F}_s^{-1} \{g_2\}. \quad (19)$$

Если $g_1(\omega) = \mathcal{F}_s \{h_1\}$, $g_2(\omega) = \mathcal{F}_s \{h_2\}$, то формула (19) запишется в виде

$$\mathcal{F}_s \{h_1\} * \mathcal{F}_s \{h_2\} = \mathcal{F}_c \{h_1 \cdot h_2\}. \quad (20)$$

Выражение (17) является дискретным аналогом формулы (20).

После подстановки ряда (13) в выражение (12) оно принимает вид

$$a_i = \frac{F_0 R^3 \sum_{k=1}^\infty k A_{ik}}{(\mu_i - \mu) \left(\frac{1}{2} B_{i0} \int_{-\pi}^\pi \rho S d\phi + \sum_{k=1}^\infty B_{ik} \int_{-\pi}^\pi \rho S \cos(k\phi) d\phi \right)}, \quad (21)$$

где коэффициенты B_{ik} определяются формулой (17).

Формула (11) для однородного кольца получается из (21) как частный случай при $A_{ik} = \delta_{ik}$, $\rho S = \text{const}$.

При использовании допущения о нерастяжимости средней линии кольца распределение амплитуды радиальных колебательных смещений будет описываться формулой

$$w(\phi) = \frac{dv}{d\phi} = \sum_{i=1}^\infty a_i \frac{dv_i}{d\phi}.$$

Для однородного кольца

$$w(\phi) = \sum_{i=1}^\infty i a_i \cos(i\phi) = \sum_{i=1}^\infty \frac{i a_i'}{f_i^2 - f^2} \cos(i\phi), \quad (22)$$

где коэффициенты a_i определяются формулой (11).

Для неоднородного кольца

$$w(\phi) = \sum_{i=1}^\infty a_i \sum_{k=1}^\infty k A_{ik} \cos(k\phi),$$

где коэффициенты a_i определяются формулой (21).

Механизм усиления колебаний по амплитуде однородными кольцевыми упругими элементами может быть объяснен на основе (22). Для этого рассмотрим эпюры распределения амплитуды радиальных колебательных смещений для изгибных мод колебаний i -го и $(i + 1)$ -го порядков (рис. 1).

На рисунке представлена развертка половины концентратора длиной πR . Порядки i и $i + 1$ мод выбраны таким образом, что $f_i < f < f_{i+1}$. Как следует из формулы (22), при подобном выборе коэффициенты $i a_i' / (f_i^2 - f^2)$ и $(i + 1) a_{i+1}' / (f_{i+1}^2 - f^2)$, характеризующие вклад рассматриваемых мод в результирующую амплитуду колебаний, имеют противоположные знаки.

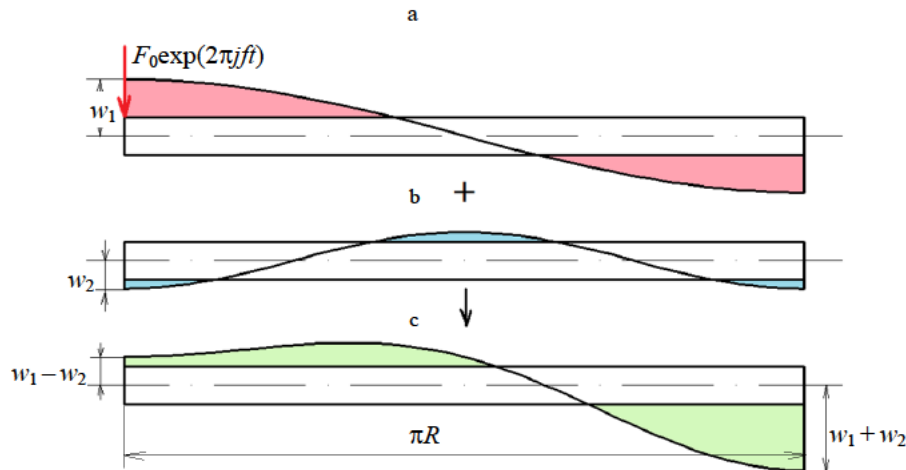


Рис. 1. Схема усиления колебаний однородным кольцевым концентратором
 Fig. 1. Diagram of vibration amplification by means of uniform ring-shaped concentrator

Как следствие, во входном сечении концентратора $\varphi = 0$ i -я и $(i + 1)$ -я гармоники ряда (22) с амплитудами w_1 и w_2 будут складываться в противофазе с результирующей амплитудой $w_1 - w_2$, а в выходном сечении $\varphi = \pi$ будет происходить их синфазное сложение с более высокой результирующей амплитудой $w_1 + w_2$. В действительности происходит не просто сложение двух изолированных мод, а более сложное взаимодействие множества субрезонансных мод, для которых $f_i < f$, со множеством надрезонансных мод, для которых $f_i > f$, однако для более наглядного анализа рассматриваются только две моды колебаний, частоты которых имеют наименьшие отклонения от частоты вынуждающего воздействия.

Амплитуда радиальной составляющей колебательной скорости будет иметь вид

$$v_r(\varphi) = 2\pi j f w(\varphi).$$

С учетом формулы (22) для однородного кольца

$$v_r(\varphi) = 2\pi j f \sum_{i=1}^{\infty} i a_i \cos(i\varphi). \quad (23)$$

Так как собственные частоты колебаний однородного кольца имеют вид [12]

$$f_i = \frac{i(i^2 - 1)}{2\pi R^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S(i^2 + 1)}},$$

функциональный ряд (23) при $\varphi = 0$ с учетом формулы (11) превращается в следующий числовой ряд:

$$v_r(0) = \frac{F_0 \omega}{j\pi \rho S R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2}{(i^2 + 1)\omega^2 - i^2(i^2 - 1)^2 \beta},$$

где $\beta = \frac{EI}{\rho S R^4}$, $\omega = 2\pi f$ – круговая частота.

Входной механический импеданс однородного концентратора будет иметь вид

$$Z_{\text{вх}}(\omega) = \frac{F_0}{v_r(0)} = \frac{j\pi \rho S R}{\omega \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2}{(i^2 + 1)\omega^2 - i^2(i^2 - 1)^2 \beta}}, \quad (24)$$

а коэффициент усиления колебаний по амплитуде при приложении вынуждающей нагрузки к входному сечению будет определяться формулой

$$K(\omega) = \frac{v_r(\pi)}{v_r(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i i^2}{(i^2 + 1)\omega^2 - i^2(i^2 - 1)^2 \beta}}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2}{(i^2 + 1)\omega^2 - i^2(i^2 - 1)^2 \beta}}. \quad (25)$$

Выражение (24) совпадает с представленным в работе [13]. Знак мнимой части импеданса определяется знаком аргумента комплексной экспоненты $\exp(\pm 2\pi j f t)$, используемой для описания гармонических временных зависимостей. В работе [13] используется представление $\exp(2\pi j f t)$, совпадающее с принятым в настоящем исследовании.

Собственные частоты колебаний концентратора могут быть определены из уравнения

$$\text{Im}(Z_{\text{вх}}(\omega)) = 0.$$

Для неоднородного кольца

$$v_r(0) = j\omega \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sum_{k=1}^{\infty} kA_{ik} = \frac{F_0\omega}{jR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(\sum_{k=1}^{\infty} kA_{ik} \right)^2}{(\omega^2 - \omega_i^2) \left(\frac{1}{2} B_{i0} \int_{-\pi}^{\pi} \rho S d\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} B_{ik} \int_{-\pi}^{\pi} \rho S \cos(k\varphi) d\varphi \right)} =$$

$$= \frac{F_0\omega}{jR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} C_{i0} + \sum_{k=1}^{\infty} C_{ik}}{(\omega^2 - \omega_i^2) \left(\frac{1}{2} B_{i0} \int_{-\pi}^{\pi} \rho S d\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} B_{ik} \int_{-\pi}^{\pi} \rho S \cos(k\varphi) d\varphi \right)},$$

где коэффициенты C_{ik} определяются с помощью обобщенной дискретной свертки,

$$C_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{k'=1}^{\infty} ((k+k')A_{i,k+k'} + |k-k'| A_{i,|k-k'|}) k' A_{ik'}.$$

Входной механический импеданс неоднородного концентратора

$$Z_{\text{вх}}(\omega) = \frac{jR}{\omega} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} C_{i0} + \sum_{k=1}^{\infty} C_{ik}}{(\omega^2 - \omega_i^2) \left(\frac{1}{2} B_{i0} \int_{-\pi}^{\pi} \rho S d\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} B_{ik} \int_{-\pi}^{\pi} \rho S \cos(k\varphi) d\varphi \right)} \right)^{-1}.$$

Амплитуда радиальной составляющей колебательной скорости в выходном сечении концентратора

$$v_r(\pi) = j\omega \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k kA_{ik} = \frac{F_0\omega}{jR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} kA_{ik} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k kA_{ik}}{(\omega^2 - \omega_i^2) \left(\frac{1}{2} B_{i0} \int_{-\pi}^{\pi} \rho S d\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} B_{ik} \int_{-\pi}^{\pi} \rho S \cos(k\varphi) d\varphi \right)}.$$

Произведение сумм в числителе может быть представлено в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} kA_{ik} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k kA_{ik} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2kA_{i,2k} \right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)A_{i,2k-1} \right)^2 = \frac{1}{2} D_{i0} + \sum_{k=1}^{\infty} D_{ik},$$

где коэффициенты D_{ik} будут определяться формулой

$$D_{ik} = 2 \sum_{k'=1}^{\infty} ((k+k')A_{i,2(k+k')} + |k-k'| A_{i,2|k-k'|}) k' A_{i,2k'} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k'=1}^{\infty} (2(k+k')-1) A_{i,2(k+k')-1} + |2(k-k')+1| A_{i,2(k-k')+1} (2k'-1) A_{i,2k'-1}.$$

С учетом полученных соотношений коэффициент усиления колебаний для неоднородного концентратора примет вид

$$K(\omega) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} D_{i0} + \sum_{k=1}^{\infty} D_{ik}}{(\omega^2 - \omega_i^2) \left(\frac{1}{2} B_{i0} \int_{-\pi}^{\pi} \rho S d\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} B_{ik} \int_{-\pi}^{\pi} \rho S \cos(k\varphi) d\varphi \right)} \right) \times$$

$$\times \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} C_{i0} + \sum_{k=1}^{\infty} C_{ik}}{(\omega^2 - \omega_i^2) \left(\frac{1}{2} B_{i0} \int_{-\pi}^{\pi} \rho S d\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} B_{ik} \int_{-\pi}^{\pi} \rho S \cos(k\varphi) d\varphi \right)} \right)^{-1}.$$

На практике представляет интерес использование кольцевых концентраторов совместно с традиционными стержневыми волноводами или концентраторами. В связи с этим рассмотрим составную колебательную систему, состоящую из последовательно соединенных стержневого волновода с постоянной площадью поперечного сечения и однородного кольцевого концентратора. Покажем, что такая колебательная система обеспечивает усиление колебаний по амплитуде при работе в резонансном режиме, хотя входящие в ее состав элементы не обладают усилительными свойствами на своих собственных частотах. Выходной механический импеданс стержневого волновода будет определяться выражением [1, с. 91]

$$Z_{\text{вых } 1}(\omega) = j\rho_1 c_1 S_1 \operatorname{tg} \left(\frac{\omega L}{c_1} \right),$$

где L – длина волновода; $c_1 = \sqrt{E_1/\rho_1}$ – скорость продольной стержневой волны в материале волновода, индекс «1» указывает на отношение соответствующих параметров к стержневому волноводу.

Коэффициент усиления колебаний по амплитуде стержневым волноводом при приложении вынуждающей нагрузки к выходному сечению

$$K_1(\omega) = \cos \left(\frac{\omega L}{c_1} \right).$$

Общий коэффициент усиления колебаний составной колебательной системой

$$K_{\text{общ}}(\omega) = |K_1(\omega)K_2(\omega)|, \quad (26)$$

где коэффициент усиления $K_2(\omega)$ определяется формулой (25).

Для обеспечения максимальной эффективности передачи энергии от кольцевого концентратора к стержневому волноводу их механические импедансы должны быть согласованы между собой. Согласно известному из электротехники принципу согласования импедансов условие согласования имеет вид [14, с. 144]

$$Z_{\text{вых}}^{\text{ист}} = (Z_{\text{вх}}^{\text{нагр}})^*,$$

где $Z_{\text{вых}}^{\text{ист}}$ – выходной импеданс источника; $Z_{\text{вх}}^{\text{нагр}}$ – входной импеданс нагрузки, * обозначает комплексное сопряжение.

В рассматриваемом случае роль источника играет стержневой волновод, а роль нагрузки – кольцевой концентратор. Учитывая, что в рассматриваемом случае оба импеданса имеют нулевую действительную часть, условие согласования принимает форму

$$\operatorname{Im}(Z_{\text{вых } 1}(\omega)) + \operatorname{Im}(Z_{\text{вх } 2}(\omega)) = 0, \quad (27)$$

где импеданс $Z_{\text{вх } 2}(\omega)$ определяется выражением (24).

Условие (27) позволяет определить собственные частоты колебаний составной колебательной системы.

Результаты и их обсуждение

В качестве численного примера рассмотрена задача моделирования вынужденных колебаний

однородного кольцевого концентратора со следующими параметрами: плотность материала $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, модуль продольной упругости $E = 210 \text{ ГПа}$, размеры сторон поперечного сечения $b = h = 2 \text{ мм}$ (сечение квадратной формы), радиус средней линии $R = 20 \text{ мм}$. График зависимости $|\text{Im}(Z_{\text{вх}}(\omega))|$, рассчитанной в соответствии с формулой (24), характеризуется наличием точек резонанса $\text{Im}(Z_{\text{вх}}(\omega)) = 0$, соответствующих собственным частотам колебаний, и точек антирезонанса $|\text{Im}(Z_{\text{вх}}(\omega))| \rightarrow \infty$, соответствующих частотам вынуждающего воздействия, для которых колебательная скорость входного сечения принимает нулевое значение (рис. 2).

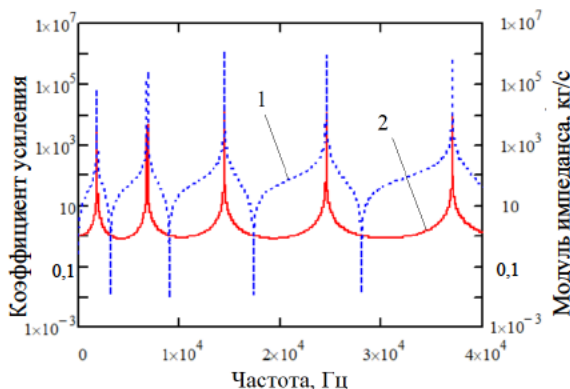


Рис. 2. Расчетные зависимости $|Z_{\text{вх}}(\omega)|$ (кривая 1) и $|K(\omega)|$ (кривая 2) для однородного кольцевого концентратора

Fig. 2. Calculated dependencies $|Z_{\text{вх}}(\omega)|$ (curve 1) and $|K(\omega)|$ (curve 2) for uniform ring-shaped concentrator

В случае антирезонанса происходит полная взаимная компенсация амплитуд субрезонансных и надрезонансных мод во входном сечении. Коэффициент усиления $K(\omega)$, рассчитанный по формуле (25), стремится к бесконечности на частотах антирезонанса, а на частотах резонанса он принимает единичные значения, так как колебания кольца в этом случае имеют одномодовый характер. Расчет производился по 30 членам ряда: дальнейшее увеличение числа членов приводило к изменению частот антирезонанса не более чем на 0,2 %.

Так как максимальные значения коэффициента усиления соответствуют частотам антире-

зонанса, для достижения максимального общего коэффициента усиления элементы составной колебательной системы должны иметь близкие частоты антирезонанса. Условие антирезонанса стержневого волновода имеет вид

$$L = \frac{(2n-1)c_1}{4f},$$

где n – натуральное число.

Подставляя в это условие одну из частот антирезонанса f_a кольцевого концентратора, можно определить длину стержневого волновода, обеспечивающую согласование элементов системы по частоте антирезонанса. Например, при $f_a = 24523 \text{ Гц}$ и $n = 1$ получим $L = 52,9 \text{ мм}$. Расчет коэффициента усиления колебаний составной колебательной системой при совпадении частот антирезонансов будет приведен далее. Более простым для анализа является случай, когда между элементами колебательной системы имеется некоторое рассогласование по частоте антирезонанса. Например, стержневой волновод с длиной $L = 47,5 \text{ мм}$ будет иметь частоту антирезонанса 27309 Гц , что соответствует отклонению 11,4 % от частоты антирезонанса кольцевого концентратора. При использовании графического представления левой части условия (27) на графике в области частот 24...28 кГц идентифицируются два антирезонанса составной колебательной системы, соответствующих антирезонансам входящих в ее состав элементов, и резонанс на частоте 24721 Гц (рис. 3).

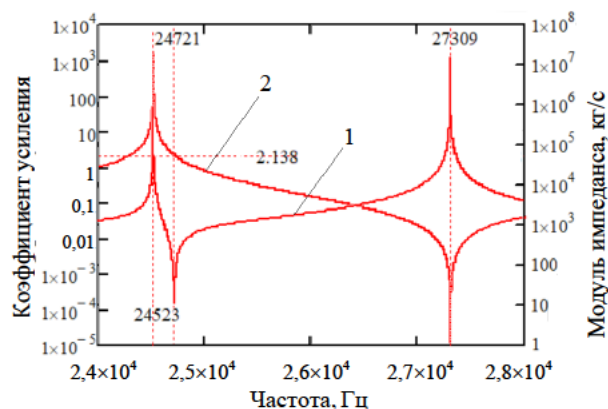


Рис. 3. Расчетные зависимости $|Z_{\text{вх}}(\omega)|$ (кривая 1) и $|K(\omega)|$ (кривая 2) для составной колебательной системы

Fig. 3. Calculated dependencies $|Z_{\text{вх}}(\omega)|$ (curve 1) and $|K(\omega)|$ (curve 2) for compound vibratory system

При расчете свойства материала и площадь поперечного сечения волновода были приняты такими же, как для кольцевого концентратора. Значение коэффициента усиления на частоте резонанса составляет 2,138. Значительный коэффициент усиления 2,481 также наблюдается на частоте 15110 Гц, однако данная частота выходит за рамки диапазона ультразвуковых частот и поэтому не представляет интереса для ультразвуковой технологии. Для остальных резонансных частот в исследованном диапазоне (от 10 Гц до 60 кГц) коэффициент усиления составил от 1,455 до 1,906.

Так как коэффициент усиления колебаний по амплитуде определяется формулой

$$K_{\text{общ}}(\omega) = \frac{|w(\pi, \omega)|}{|\xi(0, \omega)|} = \frac{|K_2(\omega)| \cdot |w(0, \omega)|}{|\xi(L, \omega)|} \cdot \frac{|K_1(\omega)|}{|1/K_2(\omega)|} \cdot \frac{|w(0, \omega)|}{|\xi(L, \omega)|}, \quad (28)$$

где $\xi(x, \omega)$ – амплитуда продольных колебательных смещений в поперечном сечении стержневого волновода с линейной координатой x при круговой частоте ω ; $w(\varphi, \omega)$ – то же радиальных колебательных смещений в поперечном сечении кольцевого концентратора с угловой координатой φ при круговой частоте ω , то при работе обоих элементов системы на частоте антирезонанса ω_a в формуле (28) возникают две неопределенности вида 0/0.

Раскрывая эти неопределенности по правилу Лопиталья, получим

$$K_{\text{общ}}(\omega_a) = \frac{\left. \frac{dK_1}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_a}}{\left. \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{K_2} \right) \right|_{\omega=\omega_a}} \cdot \frac{\left. \frac{\partial w}{\partial \omega} \right|_{\varphi=0, \omega=\omega_a}}{\left. \frac{\partial \xi}{\partial \omega} \right|_{x=L, \omega=\omega_a}}. \quad (29)$$

Для рассмотренного выше примера при работе элементов системы на совместной частоте антирезонанса $f_a = 24523$ Гц расчет коэффици-

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \xi}{\partial \omega} \right|_{x=L, \omega=\omega_a} &= \frac{N_{0x}}{\omega^2 \rho_1 c_1 S_1} \operatorname{cosec} \left(\frac{\omega L}{c_1} \right) \cos \left(\frac{\omega x}{c_1} \right) + \frac{N_{0x} L}{\omega \rho_1 c_1^2 S_1} \operatorname{ctg} \left(\frac{\omega L}{c_1} \right) \operatorname{cosec} \left(\frac{\omega L}{c_1} \right) \cos \left(\frac{\omega x}{c_1} \right) + \\ &+ \frac{N_{0x} x}{\omega \rho_1 c_1^2 S_1} \operatorname{cosec} \left(\frac{\omega L}{c_1} \right) \sin \left(\frac{\omega x}{c_1} \right) \Big|_{x=L, \omega=\omega_a} = \frac{N_{0x} L}{\omega_a \rho_1 c_1^2 S_1} = \frac{\pi N_{0x}}{2 \omega_a^2 \rho_1 c_1 S_1}. \end{aligned}$$

циента усиления по формуле (29) дает значение $K_{\text{общ}}(2\pi f_a) = 2,083$.

Достоверность полученных теоретических результатов подтверждена путем моделирования с помощью МКЭ с применением программы Comsol Multiphysics. На рис. 4 представлена расчетная собственная форма колебаний составной колебательной системы, полученная при тех же исходных данных, что и описанный выше численный пример.

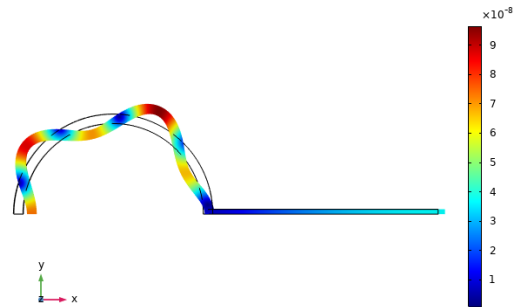


Рис. 4. Результаты расчета с помощью метода конечных элементов

Fig. 4. Results of calculation by means of FEM

Расчетные величины собственной частоты и коэффициента усиления составили соответственно 23932 Гц и 1,999, что близко к значениям, полученным на основе теоретического анализа. Погрешность определения собственной частоты составила 3,3 %. Более точные результаты могут быть получены при описании колебаний кольца уравнениями типа Тимошенко, учитывающими растяжимость средней линии.

Учитывая, что распределение амплитуды колебательных смещений в стержневом волноводе описывается формулой

$$\xi(x, \omega) = -\frac{N_{0x}}{\omega \rho_1 c_1 S_1} \operatorname{cosec} \left(\frac{\omega L}{c_1} \right) \cos \left(\frac{\omega x}{c_1} \right),$$

где N_{0x} – амплитуда внутренней силы в выходном сечении волновода, входящая в выражение (29) производная принимает вид

Из полученной формулы вытекает, что общий коэффициент усиления будет пропорционален площади S_1 поперечного сечения волновода и волновому сопротивлению $\rho_1 c_1$ его материала. В рассмотренном выше численном примере было принято $S_1 = S_2$, и соответственно для соотношения $S_1 = 2S_2$ можно прогнозировать увеличение коэффициента усиления в два раза. Действительно, расчет с помощью МКЭ дает значение $K_{\text{общ}} = 3,880$, что соответствует увеличению в 1,94 раза по сравнению со случаем $S_1 = S_2$. Повышение коэффициента усиления также может быть достигнуто за счет изготовления стержневого волновода из материала, имеющего более высокое значение волнового сопротивления по сравнению с сопротивлением материала кольцевого концентратора. Рассмотренная составная колебательная система имеет аналогию с применяемым в ультразвуковой технике ступенчатым концентратором, состоящим из двух последовательно соединенных четвертьволновых (антирезонансных) стержней, различающихся площадью поперечного сечения и/или волновым сопротивлением материалов. Коэффициент усиления колебаний таким концентратором определяется формулой

$$K = \frac{\rho_1 c_1 S_1}{\rho_2 c_2 S_2},$$

которая согласуется со сделанным выше выводом о влиянии на коэффициент усиления площади поперечного сечения и волнового сопротивления входного сегмента колебательной системы.

Учитывая, что коэффициент усиления 2,083 при согласовании элементов колебательной системы по частоте антирезонанса несколько ниже коэффициента усиления 2,138 при наличии рассогласования, представляет интерес изучение зависимости коэффициента усиления от степени рассогласования. В качестве меры рассогласования можно принять длину L стержневого волновода. Как видно из рис. 5, максимальное значение коэффициента усиления 2,162 достигается при длине волновода около 42,5 мм.

На рис. 5 также представлена кривая, полученная методом параметрической прогонки в Comsol Multiphysics. Расчет с помощью МКЭ

дал максимальное значение коэффициента усиления 2,009 при длине волновода 43 мм, что соответствует повышению по сравнению со случаем согласованной системы (1,955 при длине 53 мм).

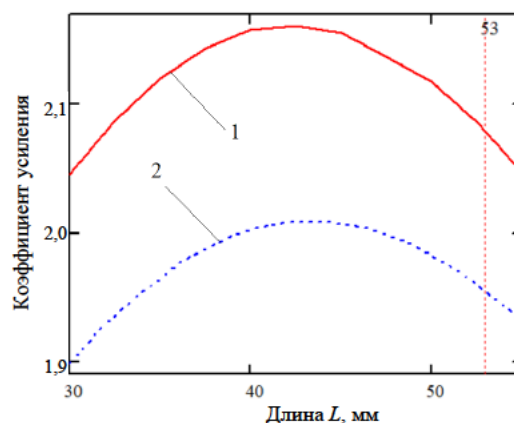


Рис. 5. Зависимости коэффициента усиления от длины волновода L , рассчитанные по формуле (26) (кривая 1) и с помощью метода конечных элементов (кривая 2)

Fig. 5. Dependencies between gain factor and waveguide length L calculated using Equation (26) (curve 1) and by means of FEM (curve 2)

ВЫВОДЫ

1. На основе теоретического анализа и расчетов с помощью метода конечных элементов показано, что составная колебательная система, состоящая из последовательно соединенных стержневого волновода и однородного кольцевого концентратора, обеспечивает усиление колебаний по амплитуде при условии, что частоты антирезонанса элементов системы имеют близкие значения.

2. Показано, что коэффициент усиления колебаний описанной выше составной колебательной системой может быть повышен за счет увеличения площади поперечного сечения стержневого волновода и/или волнового сопротивления его материала, что согласуется с результатами, известными для ступенчатых концентраторов ультразвука.

3. Установлено, что для достижения максимального коэффициента усиления частоты антирезонанса элементов колебательной системы должны иметь некоторое рассогласование между собой, величина которого определяется путем численного анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асташев, В. К. Нелинейная динамика ультразвуковых технологических процессов / В. К. Асташев, В.Л. Крупенин. М.: МГУП имени Ивана Федорова, 2016. 372 с.
2. Луговой, В. П. Определение размерных параметров кольцевого концентратора ультразвуковой системы / В. П. Луговой, И. В. Луговой // Наука и техника. 2018. Т. 17, № 1. С. 51–55. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2018-17-1-51-55>
3. Исследование характеристик составных кольцевых концентраторов ультразвуковых колебаний с помощью метода передаточных матриц / Д. А. Степаненко, А. С. Емельянова, М. А. Плескач, Н. В. Солодка // Техническая акустика. 2018. № 2. URL: <https://ejta.org/archive/articles2018/stepanenko2.pdf>.
4. Experimental Investigation of Peening Cylindrical Workpieces Utilizing A Transducer with Ring Sonotrode / F. Bai, L. Wang, K. Yang [et al.] // Applied Sciences. 2021. Vol. 11, No 1. Article 94. <https://doi.org/10.3390/app11010094>.
5. Nonlinear Vibration Isolation via A Circular Ring / Z.-Q. Lu, D.-H. Gu, H. Ding [et al.] // Mechanical Systems and Signal Processing. 2020. Vol. 136. Article 106490. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.106490>.
6. Greenberg, L. Numerical Methods for Higher Order Sturm-Liouville Problems / L. Greenberg, M. Marletta // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2000. Vol. 125, No 1–2. P. 367–383. [https://doi.org/10.1016/s0377-0427\(00\)00480-5](https://doi.org/10.1016/s0377-0427(00)00480-5).
7. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1970. 720 с.
8. Fedotov, I. Application of Eigenfunction Orthogonalities to Vibration Problems / I. Fedotov, T. Fedotov, M. Shatalova, H. M. Tenkama // Proc. of the World Congress on Engineering. London, 2009. Vol. II. P. 1169–1173. URL: <https://researchspace.csir.co.za/server/api/core/bitstreams/da4c7905-7772-461b-a5be-2a5262ef8822/content>.
9. Степаненко, Д. А. Математическое моделирование колебаний неоднородных кольцевых ультразвуковых волноводов / Д. А. Степаненко, К. А. Бунчук // Механика машин, механизмов и материалов. 2021. № 3. С. 90–96. <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2021-3-56-90-96>.
10. Li, L. Use of Fourier Series in the Analysis of Discontinuous Periodic Structures / L. Li // Journal of the Optical Society of America. 1996. Vol. 13, No 9. P. 1870–1876. <https://doi.org/10.1364/josaa.13.001870>.
11. Thao, N. X. Integral Transforms of Fourier Cosine and Sine Generalized Convolution Type / N. X. Thao, V. K. Tuan, N. T. Hong // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2007. Article 97250. <https://doi.org/10.1155/2007/97250>.
12. Hirashima, K. Higher-Order Theories for Free Vibration Analysis of Circular Rings / K. Hirashima, K. Hirano // Journal of the Japan Society of Civil Engineers. 1990. No 416/I-13. P. 201–204. https://doi.org/10.2208/jscej.1990.416_201.
13. Heckl, M. A. Compendium of Impedance Formulas. Bolt Beranek and Newman Report No 774 / M. A. Heckl. Cambridge, 1961. 49 p. <https://doi.org/10.21236/ad0257966>.
14. Основы теории цепей / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин А. В. Нетушил, С. В. Страхов. М.: Энергия, 1975. 752 с.

Поступила 18.02.2025

Подписана в печать 22.04.2025

Опубликована онлайн 30.05.2025

REFERENCES

1. Astashev V. K., Krupenin V. L. (2016) *Nonlinear Dynamics of Ultrasonic Technological Processes*. Moscow, Moscow State University of Printing Arts named after Ivan Fedorov. 372 (in Russian).
2. Lugovoi V. P., Lugovoi I. V. (2018) Determination of Dimensional Parameters for Annular Concentrator of Ultrasonic System. *Nauka i Tehnika = Science & Technique*, 17 (1), 51–55. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2018-17-1-51-55> (in Russian).
3. Stepanenko D. A., Emel'yanova A. S., Pleskach M. A., Solodkaya N. V. (2018) Study of the Characteristics of Composite Ring Concentrators of Ultrasonic Vibrations Using the Transfer Matrix Method. *Technical Acoustics*, (2). Available at: <https://ejta.org/archive/articles2018/stepanenko2.pdf> (in Russian).
4. Bai F., Wang L., Yang K., He Z., Qi G., Twiefel J. (2020) Experimental Investigation of Peening Cylindrical Workpieces Utilizing a Transducer with Ring Sonotrode. *Applied Sciences*, 11 (1), 94. <https://doi.org/10.3390/app11010094>.
5. Lu Z.-Q., Gu D.-H., Ding H., Lacarbonara W., Chen L.-Q. (2020) Nonlinear Vibration Isolation Via a Circular Ring. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 136, 106490. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.106490>.
6. Greenberg L., Marletta M. (2000) Numerical Methods for Higher Order Sturm-Liouville Problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 125 (1–2), 367–383. [https://doi.org/10.1016/s0377-0427\(00\)00480-5](https://doi.org/10.1016/s0377-0427(00)00480-5).
7. Korn G., Korn T. (1970) *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. Moscow, Nauka Publ. 720 (in Russian).
8. Fedotov I., Fedotova T., Shatalov M., Tenkam H. M. (2009) Application of Eigenfunction Orthogonalities to Vibration Problems. *Proc. of the World Congress on Engineering. London. Vol. II*, 1169–1173. Available at: <https://researchspace.csir.co.za/server/api/core/bitstreams/da4c7905-7772-461b-a5be-2a5262ef8822/content>.
9. Stepanenko D. A., Bunchuk K. A. (2021) Mathematical Modelling of Vibrations of Non-Uniform Ring-Shaped Ultrasonic Waveguides. *Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials*, 3 (56), 90–96. <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2021-3-56-90-96> (in Russian).
10. Li L. (1996) Use of Fourier Series in the Analysis of Discontinuous Periodic Structures. *Journal of the Optical Society of America A*, 13 (9), 1870. <https://doi.org/10.1364/josaa.13.001870>.
11. Thao N. X., Tuan V. K., Hong N. T. (2007) Integral Transforms of Fourier Cosine and Sine Generalized Convolution Type. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2007, 097250. <https://doi.org/10.1155/2007/97250>.
12. Hirashima K., Hirano K. (1990) Higher-order theories for free vibration analysis of circular rings. *Journal of the Japan Society of Civil Engineers*, 1990 (416), 201–204 (in Japanese). https://doi.org/10.2208/jscej.1990.416_201.
13. Heckl M. A. (1961) *Compendium of Impedance Formulas. Bolt Beranek and Newman Report No 774*. Cambridge. 49. <https://doi.org/10.21236/ad0257966>.
14. Zeveke G. V., Ionkin P. A., Netushil A. V., Strakhov S. V. (1975) *Fundamentals of Circuit Theory*. Moscow, Energiya Publ. 752 (in Russian).

Received: 18.02.2025

Accepted: 22.04.2025

Published online: 30.05.2025