
МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО
ТВЕРДОГО ТЕЛА
DEFORMATION
IN SOLID MECHANICS

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2025-24-3-225-233>

УДК 621.891

Модель взаимосвязи коэффициентов трения Кулона и Зибеля для пластичных материалов

Докт. техн. наук, доц. В. Г. Барсуков¹⁾, канд. физ.-мат. наук, доц. А. И. Веремейчик²⁾,
канд. техн. наук, доц. Е. А. Евсеева³⁾

¹⁾Гродненский государственный университет имени Янки Купалы (Гродно, Республика Беларусь),

²⁾Брестский государственный технический университет (Брест, Республика Беларусь),

³⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

Реферат. Работа посвящена сравнительному анализу параметров напряженного состояния микровыступов поверхностей контактирующих материалов в области низких контактных давлений, характерных для закона трения Амонтона–Кулона, и в области высоких давлений, характерных для модели пластического трения Зибеля, используемой в теории обработки материалов давлением. Цель статьи – на основе микромеханического моделирования параметров упруго-пластического контактного взаимодействия выступов шероховатости поверхностей с использованием адгезионной теории трения произвести теоретическое обоснование и расчетную оценку взаимосвязи коэффициентов трения Кулона и Зибеля для пластичных материалов. Шероховатости деформируемого поверхностного слоя моделировались сферическими микровыступами. При анализе исходили из того, что деформирование микронеровностей происходит в виде трех последовательных стадий. Вначале материал деформируется упруго, затем в приповерхностном слое зарождается область пластического состояния, окруженная упруго-деформируемым материалом, а на конечной стадии происходит свободное пластическое течение. Принято в первом приближении, что для малых стесненных упруго-пластических деформаций применим закон Гука. В основной части работы на основе предложенной модели микроконтактного взаимодействия определены силовые параметры перехода от стесненного упруго-пластического деформирования микровыступов к свободному пластическому течению с учетом действия контактного трения, по Зибелю, на модельных пятнах касания. В дальнейшем выполнен переход от осредненных контактных давлений и удельных сил трения на единичных пятнах касания к номинальным давлениям и удельным силам трения. Получены аналитическая зависимость, связывающая коэффициенты трения Кулона и Зибеля, а также коэффициент Пуассона подвергаемого пластическому деформированию материала. На примере углеродистых и легированных сталей, а также цветных металлов и сплавов произведена расчетная оценка взаимосвязи коэффициентов трения Кулона и Зибеля для широкого диапазона изменения коэффициента Пуассона. Рассчитанные значения согласуются с имеющимися экспериментальными данными. Результаты исследований могут быть использованы в учебном процессе, а также в инженерной и научно-исследовательской практике

Ключевые слова: трение, адгезионная теория, микромеханическая модель, коэффициент трения Кулона, фактор трения Зибеля, пластическое деформирование материалов

Для цитирования: Барсуков, В. Г. Модель взаимосвязи коэффициентов трения Кулона и Зибеля для пластичных материалов / В. Г. Барсуков, А. И. Веремейчик, Е. А. Евсеева // *Наука и техника*. 2025. Т. 24, № 3. С. 225–233. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2025-24-3-225-233>

Адрес для переписки

Евсеева Елена Анатольевна
Белорусский национальный технический университет
просп. Независимости, 65,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 239-93-04
ftk@bntu.by

Address for correspondence

Евсеева Elena A.
Belarusian National Technical University
65, Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 239-93-04
ftk@bntu.by

Model of the Relationship between the Coulomb and Siebel Friction Coefficients for Plastic Materials

V. G. Barsukov¹⁾, A. I. Verameichyk²⁾, E. A. Evseeva³⁾

¹⁾Yanka Kupala Grodno State University (Grodno, Republic of Belarus),

²⁾Brest State Technical University (Brest, Republic of Belarus),

³⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The work is devoted to a comparative analysis of the stress state parameters for micro protrusions of the contacting materials surfaces in the region of low contact pressures characteristic for the Amontons-Coulomb friction law and in the region of high pressures characteristic of the Siebel plastic friction model used in the theory of material processing by pressure. The aim of the work is to substantiate theoretically and calculate the relationship between the Coulomb and Siebel friction coefficients for plastic materials based on micromechanical modeling of the elastic-plastic contact interaction parameters for the surface roughness protrusions using the adhesive friction theory. The roughness of the deformable surface layer was modeled by spherical micro protrusions. The analysis was based on the fact that the deformation of micro roughnesses occurs in three successive stages. Initially, the material is deformed elastically, then a plastic state region, surrounded by elastically deformable material, arises in the near-surface layer, and free plastic flow occurs at the final stage. It is accepted in the first approximation that Hooke's law is applicable for small constrained elastic-plastic deformations. In the main part of the work, on the basis of the proposed micro contact interaction model, the force parameters of the transition from constrained elastic-plastic deformation of micro protrusions to free plastic flow are determined, taking into account the action of contact friction, according to Siebel, on model contact spots. Subsequently, a transition from averaged contact pressures and specific friction forces on single contact spots to nominal pressures and specific friction forces is performed. An analytical dependence is obtained linking the Coulomb and Siebel friction coefficients, as well as the Poisson ratio of the material subjected to plastic deformation. Using carbon and alloy steels, as well as non-ferrous metals and alloys as examples, a calculated assessment of the relationship between the Coulomb and Siebel friction coefficients is made for a wide range of variations of the Poisson ratio. The calculated values are consistent with the available experimental data. The research results can be used in the educational process, as well as in engineering and scientific research practice.

Keywords: friction, adhesion theory, micromechanical model, Coulomb friction coefficient, Siebel friction factor, plastic deformation of materials

For citation: Barsukov V.G. Verameichyk A.I., Evseeva E.A. Model of the Relationship between the Coulomb and Siebel Friction Coefficients for Plastic Materials // *Science and Technique*. 24 (3), 225–233. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2025-24-3-225-233> (in Russian)

Введение

Трение играет существенную роль не только в механике машин и механизмов [1, 2], но и при обработке давлением твердых [3, 4] и дисперсных [5] материалов. В последнем случае оно определяет силовые и энергетические параметры процессов деформирования, неоднородность напряженно-деформированного состояния и влияет на неравномерность распределения показателей физико-механических свойств получаемых изделий [6, 7]. Несмотря на важность проблемы трения, многие ее аспекты изучены недостаточно [8, 9], что обусловлено сложностью протекающих в зоне фрикционного контакта явлений.

Теоретические исследования силовых параметров в зоне фрикционного контакта основаны преимущественно на законе трения Амонтона–Кулона, который устанавливает линей-

ную зависимость удельных сил трения τ от давления p в зоне контакта. Вместе с тем такой подход часто не подтверждается при обработке материалов давлением, поскольку зависимость удельных сил трения от давления в зоне контакта является существенно нелинейной [1, 8–11]. При анализе процессов объемной штамповки металлов применяется иной подход, основанный на модели пластического трения Зибеля, согласно которой удельные силы трения не зависят от контактного давления, а составляют некоторую часть (через долевого коэффициент, называемый также фактор) от предела текучести материала на сдвиг [12]. Кроме того, известны нелинейные зависимости удельных сил трения от давления, согласующиеся в области низких давлений с законом трения Амонтона–Кулона, а в области высоких давлений – с моделью пластического трения Зибеля [9–11]. Обзор этих исследований приведен в [9]. Вме-

сте с тем из опубликованных работ неясно, существует ли взаимосвязь коэффициентов трения Кулона и Зибеля.

Цель работы – на основе микромеханического моделирования параметров упруго-пластического контактного взаимодействия выступов шероховатости поверхностей с использованием адгезионной теории трения произвести теоретическое обоснование и расчетную оценку взаимосвязи коэффициентов трения Кулона и Зибеля при пластическом деформировании материалов.

Методика исследований

Теоретическое обоснование взаимосвязи коэффициентов трения Кулона и Зибеля осуществляли с использованием адгезионной теории трения на основе разработки микроконтактной модели стесненного упруго-пластического деформирования шероховатых поверхностей. Шероховатости моделировались сферическими микровыступами. Вначале определяли силовые параметры перехода от стесненного упруго-пластического деформирования к свободному для единичных модельных пятен касания. Принималось действие модели пластического трения Зибеля на пятнах касания. На втором этапе, после составления расчетной схемы и получения уравнений для модельного контакта единичных шероховатостей, переходили от контактных давлений и удельных сил трения на пятнах касания к осредненным давлениям и удельным силам трения на номинальной площади контакта. Результаты моделирования приводили к аналитической зависимости, связывающей показатели деформационных и фрикционных свойств материала. Для проверки расчетной схемы выполнялись оценочные расчеты на примере углеродистых и легированных сталей, а также цветных металлов и сплавов.

Теоретическое обоснование взаимосвязи коэффициентов трения Кулона и Зибеля

Выполним сравнительный анализ расчетных моделей фрикционного контакта. Широко распространенный в механике машин и физике закон трения Амонтона–Кулона устанавливает линейную взаимосвязь удельных сил трения τ от давления p в зоне контакта

$$\tau = fp, \quad (1)$$

где f – коэффициент трения Кулона.

Вместе с тем в теории обработки металлов давлением исходят из установленной Зибелем закономерности [12], что при высоких контактных давлениях p удельные силы трения не зависят от p , а составляют некоторую долю от предела текучести на сдвиг τ_s деформируемого материала

$$\tau = m\tau_s, \quad (2)$$

где m – так называемый «фактор трения» Зибеля.

Но согласно энергетической теории текучести предел текучести материала на сдвиг τ_s связан с пределом текучести при растяжении и сжатии σ_s [13]

$$\tau_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \approx 0,577\sigma_s. \quad (3)$$

С учетом (3) аналитическая зависимость (2) может быть преобразована к следующему виду:

$$\tau = \frac{m}{\sqrt{3}}\sigma_s = \mu_s\sigma_s, \quad (4)$$

где μ_s – коэффициент пластического трения Зибеля, рассчитываемый по формуле

$$\mu_s = \frac{m}{\sqrt{3}} \approx 0,577m. \quad (5)$$

Из формул (1)–(4) видно, что существует противоречие закона трения Амонтона–Кулона (линейная зависимость удельных сил трения от давления) и модели пластического трения Зибеля (независимость удельных сил трения от давления). Проанализируем возможность устранения этого противоречия с использованием адгезионной теории трения, которая основана на выдвинутом Ф.П. Боуденом и Д. Тейбором положении о том, что вступающие в контакт неровности образуют «мостики схватывания» благодаря адгезии на пятнах контакта [14]. В зависимости от свойств контактирующих материалов срез «мостиков схватывания» может происходить по границе раздела неровностей или по более мягкому материалу. С увеличением нормальной нагрузки растут пластическая деформация контактирующих выступов и сближение тел трения. В результате увеличиваются размеры и число «мостиков схватывания», что сопровождается ростом си-

лы трения F_T . Следовательно, сила трения растет пропорционально площади A_r фактического контакта и определяется произведением удельных сил адгезионного сцепления τ_a на величину A_r [14, 15]:

$$F_T = \tau_a A_r = \tau_a \eta A_n, \quad (6)$$

где $\eta = A_r / A_n$ – относительная площадь фактического контакта; A_n – номинальная площадь касания.

С учетом формулы (6) для удельных сил трения τ можно записать

$$\tau = \frac{F_T}{A_n} = \tau_a \eta. \quad (7)$$

Для практического использования формулы (7) необходимо знать закономерность изменения относительной площади A_r фактического контакта как функции прикладываемого давления и механических свойств контактирующих материалов.

Известно [16], что при контакте сфер (и сферических выступов) из упруго-пластических материалов процесс деформирования осуществляется в виде нескольких последовательно реализуемых стадий (рис. 1).

На начальной стадии деформирование осуществляется упруго. Затем в приповерхностном слое зарождается область пластического состояния, окруженная упруго-деформируемым материалом (стадия стесненного упруго-пластического состояния). При дальнейшем росте нагрузки область пластического состояния выходит на поверхность, после чего процесс характеризуется свободным упруго-пластическим деформированием материала.

Наиболее подробно изучена первая стадия, которая подчиняется классическим решениям теории упругости [17]. Заключительную стадию при оценочных технических расчетах предложено описывать на основе модели внедрения жесткой сферы в пластическое не упрочняемое полупространство [15]. В простейшем случае (для малых пластических деформаций) эта зависимость изменения относительной площади η фактического контакта как функции прикладываемого давления имеет линейный характер [15]:

$$\eta = \frac{P}{c\sigma_s}, \quad (8)$$

где $c \approx 3$ – коэффициент.

Приняв, что на площадке фактического контакта выполняется модель пластического трения Зибеля в форме (4), из аналитической зависимости (7) с учетом (8) получаем следующее выражение для расчета удельных сил трения:

$$\tau = \frac{F_T}{A_n} = \frac{\mu_s}{c} p. \quad (9)$$

Как видно из (9), удельные силы трения τ прямо пропорциональны прикладываемому давлению p . Таким образом, при малых пластических деформациях, когда площадь фактического контакта мала в сравнении с номинальной, из модели пластического трения Зибеля на микроплощадках следует закон трения Амонтона–Кулона на макроплощадках. При этом коэффициент трения Кулона f связан с коэффициентом пластического трения Зибеля μ_s при помощи следующей зависимости:

$$f = \frac{\mu_s}{c}. \quad (10)$$

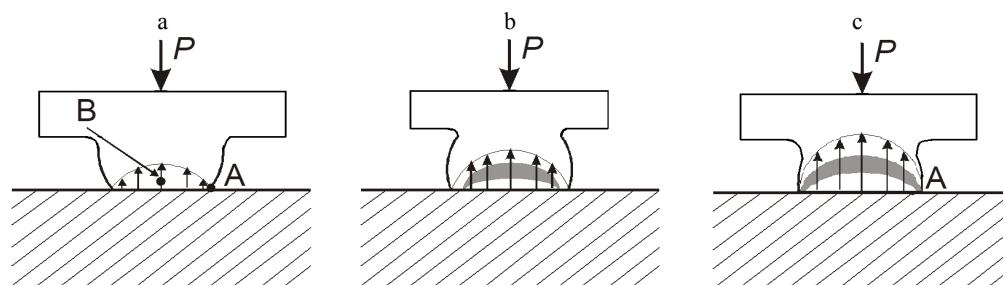


Рис. 1. Схемы деформирования материала при контакте выступов в виде микросфер с гладкой поверхностью: а – идеально упругое; б – стесненное упруго-пластическое; с – свободное упруго-пластическое

Fig. 1. Schemes of material deformation upon contact of protrusions in the form of microspheres with a smooth surface: а – ideally elastic; б – constrained elastic-plastic; с – free elastic-plastic

Поскольку в рассмотренной модели $c \approx 3$ [15], из формулы (10) следует, что коэффициент пластического трения Зибеля μ_s в три раза больше коэффициента трения Кулона f . При этом максимальное значение коэффициента трения Кулона f_{\max} для всех видов контактирующих материалов, независимо от показателей их деформационных свойств, составляет

$$f_{\max} = \frac{\mu_{s\max}}{c} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = 0,192. \quad (11)$$

Однако такой вывод не подтверждается на практике.

Наряду с рассмотренной выше моделью внедрения жесткой сферы в пластическое полупространство имеется ряд исследовательских работ [16, 17], посвященных анализу стадии стесненного упруго-пластического деформирования материалов сферическим индентором. В частности, в работе [17] предложена упрощенная модель с шаровым ядром упруго-пластического внедрения. Предполагается, что внутри ядра имеет место гидростатическое напряженное состояние с интенсивностью, равной среднему контактному давлению p_m . В соответствии с этой моделью [15, 17] для несжимаемого материала среднее давление p_m определяется соотношением $p_m/\sigma_s = 2,7$, что на 10 % меньше значений, предсказываемых формулой (8) в соответствии с теорией идеальной пластичности. При таком подходе в соответствии с рассматриваемой адгезионной теорией трения следует допустить увеличение максимального коэффициента трения Кулона до значения

$$f_{\max} = \frac{\mu_{s\max}}{2,7} = \frac{0,577}{2,7} \approx 0,214. \quad (12)$$

Полученное значение лучше согласуется с имеющимися экспериментальными данными и свидетельствует о перспективности развития микроконтактного подхода с более углубленным учетом показателей механических свойств подвергаемого деформированию материала.

Разработка микроконтактной адгезионной модели взаимосвязи коэффициентов трения Кулона и Зибеля

Рассмотрим условия перехода от стадии стесненного упруго-пластического деформиро-

вания (рис. 1) к фазе пластического смятия неровностей. В связи с тем, что пластическая линза внутри микросферы окружена упругой оболочкой, для малых стесненных упруго-пластических деформаций на этой стадии примем в первом приближении действие закона Гука. В соответствии с энергетической теорией текучести переход от упругого состояния к пластическому в любой точке начинается тогда, когда эквивалентные напряжения σ_{red} станут равны пределу текучести [13] σ_s . В точке A (рис. 1в) эквивалентные напряжения σ_{redA} равны [13, 16]

$$\sigma_{redA} = \frac{\sqrt{3}(1-2\nu)}{3} p_0, \quad (13)$$

где p_0 – наибольшие напряжения в зоне контакта (напряжения Герца); ν – коэффициент Пуассона.

Из (13) следует, что максимальные контактные напряжения p_0 , соответствующие переходу материала в точке A от упругого состояния к пластическому, равны

$$p_0 = \frac{\sqrt{3}}{1-2\nu} \sigma_s. \quad (14)$$

Поскольку среднее давление p_m в зоне контакта в соответствии с теорией Герца составляет $2/3$ от максимального p_0 [13, 15], переход материала в точке A от упругого состояния к пластическому будет осуществляться при среднем давлении

$$p_m = \frac{2}{3} p_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3(1-2\nu)} \sigma_s. \quad (15)$$

Для удельных сил трения на площадках фактического контакта в соответствии с законом трения Амонтона–Кулона с учетом (15) можно записать

$$\tau = f p_m = f \frac{2\sqrt{3}}{3(1-2\nu)} \sigma_s. \quad (16)$$

Приняв в формуле (7) прочность адгезионного сцепления τ_a , равной удельным силам трения, по Зибелю, в форме (4), получаем

$$\tau = \tau_a \frac{A_r}{A_H} = \mu_s \sigma_s \frac{A_r}{A_H}. \quad (17)$$

Входящую в формулу (17) площадь фактического контакта A_r можно найти как отношение действующего усилия P к среднему давлению p_m на площадках фактического контакта. При этом учтем, что прижимающее усилие P можно рассматривать как произведение номинального давления p на номинальную площадь контакта A_H . Тогда

$$A_r = \frac{P}{p_m} = \frac{pA_H}{p_m}. \quad (18)$$

Подставив значение p_m из (15) в (18), находим отношение A_r/A_H

$$\frac{A_r}{A_H} = \frac{\sqrt{3}(1-2\nu)}{2} \frac{p}{\sigma_s}. \quad (19)$$

С учетом (19) формула (17) для расчета удельных сил трения τ преобразуется в следующую зависимость:

$$\tau = \frac{\sqrt{3}(1-2\nu)}{2} \mu_s p. \quad (20)$$

Сравнивая (20) с законом трения Амонтона–Кулона (1), для коэффициента трения f получаем

$$f = \frac{\sqrt{3}(1-2\nu)}{2} \mu_s. \quad (21)$$

Полученная аналитическая зависимость устанавливает искомую взаимосвязь коэффициента пластического трения Зибеля μ_s с коэффициентом трения Кулона и коэффициентом Пуассона более мягкого материала контактирующей пары. Аналогичная зависимость для фактора трения m получается совместным решением (5) и (21)

$$f = \frac{1-2\nu}{2} m. \quad (22)$$

Результаты исследований и их обсуждение

С целью апробации полученных расчетных зависимостей выполнены оценочные расчеты коэффициентов трения Кулона для широкого диапазона изменения коэффициентов пластического трения Зибеля и коэффициента Пуассона. Диапазон изменения коэффициентов Пуассона

принят в соответствии с имеющимися в справочной литературе данными для углеродистых ($\nu = 0,24-0,28$) и легированных ($\nu = 0,25-0,30$) сталей, а также меди ($\nu = 0,31-0,34$), бронзы ($\nu = 0,32-0,35$), алюминия ($\nu = 0,32-0,36$) [13]. Имеющиеся в литературе данные по значениям коэффициента пластического трения Зибеля μ_s фрагментарны и трудносопоставимы, поскольку получены по различным методикам. В связи с изложенным для оценочных расчетов выбран диапазон $\mu_s = 0,45-0,577$, верхнее значение которого ($\mu_s = 0,577$) соответствует теоретически максимально возможному сопротивлению, когда реализуется условие сдвига, по Прандтлю (пластическое течение материала в подповерхностных слоях), а меньшие значения μ_s соответствуют реальным условиям существования на контактной поверхности окисных пленок и адсорбированных слоев.

Результаты расчетов приведены в табл. 1. Курсивом (последний столбец) выделены предельные значения для идеального контакта поверхностей, не содержащих адсорбированных слоев и окисных пленок, когда реализуется условие сдвига, по Прандтлю ($\mu_s = 0,577$). Взаимосвязь коэффициентов m и μ_s при составлении таблицы принята в соответствии с формулой (5).

Таблица 1

Расчетные значения коэффициентов трения Кулона f

Calculated values of the Coulomb friction coefficients f

Коэффициент Пуассона ν	Коэффициент μ_s и фактор (m) трения Зибеля				
	$\mu_s = 0,45$	$\mu_s = 0,50$	$\mu_s = 0,55$	Среднее значение	Предельное значение
	($m = 0,78$)	($m = 0,87$)	($m = 0,95$)		
0,24	0,20	0,225	0,25	0,225	<i>0,26</i>
0,26	0,19	0,21	0,23	0,21	<i>0,24</i>
0,28	0,17	0,19	0,21	0,19	<i>0,22</i>
0,30	0,16	0,17	0,19	0,17	<i>0,20</i>
0,32	0,14	0,16	0,17	0,16	<i>0,18</i>
0,34	0,125	0,14	0,15	0,14	<i>0,16</i>
0,36	0,11	0,12	0,13	0,12	<i>0,14</i>

Анализ табл. 1 показывает, что рассчитанные значения коэффициентов трения Кулона f для сталей и цветных металлов находятся в диапазоне, который согласуется с имеющимися экспериментальными данными для сухого трения гладко обработанных поверхностей (табл. 2). Приведенные в табл. 2 ориентировочные осред-

ненные значения взяты из справочной литературы [18, 19], а также из интернет-источников. Граничное трение не рассматривалось, поскольку в этом случае коэффициент трения f зависит от вида и содержания смазки, скорости скольжения и температуры в зоне контакта [2, 20].

Таблица 2

Ориентировочные значения коэффициентов сухого трения металлов и сплавов
Approximate values of dry friction coefficients of metals and alloys

Контактирующий материал		Коэффициент трения Кулона f
Сталь конструкционная	сталь мягкая	0,20
	сталь конструкционная	0,18
	бронза	0,12–0,15
	медь	0,15
	латунь	0,19
	алюминий	0,15
	дюралюминий	0,18
Сталь хромо-никелевая	сталь конструкционная	0,15
	сталь хромоникелевая	0,18
	латунь Л62	0,16
Латунь Л59, Л62	бронза безоловянистая	0,16
	латунь	0,16

Удовлетворительное согласование экспериментальных и расчетных оценочных значений коэффициентов трения свидетельствует о корректности принятой расчетной схемы и полученных на ее основе результатов. Все это позволяет также решать представляющую интерес для практики обратную задачу – производить расчетную оценку коэффициента и «фактора» трения Зибеля по известным значениям коэффициентов трения Кулона и коэффициента Пуассона деформируемого материала. Соответствующие простые и удобные для практического использования зависимости получаются путем преобразования формул (21) и (22):

$$\mu_s = \frac{2\sqrt{3}}{3(1-2\nu)} f; \quad (23)$$

$$m = \sqrt{3}\mu_s = \frac{2f}{1-2\nu}. \quad (24)$$

Из модели внедрения жесткой сферы в идеальное пластическое полупространство в соответствии с формулой (10) следует, что отноше-

ние коэффициента пластического трения Зибеля μ_s к коэффициенту трения Кулона f есть величина, постоянная для всех материалов и приблизительно равная 3. Вместе с тем, согласно формуле (23), основанной на предложенной микроконтактной адгезионной модели, коэффициент пластического трения Зибеля линейно зависит от коэффициента трения Кулона и нелинейно – от коэффициента Пуассона более мягкого материала пары трения (рис. 2).

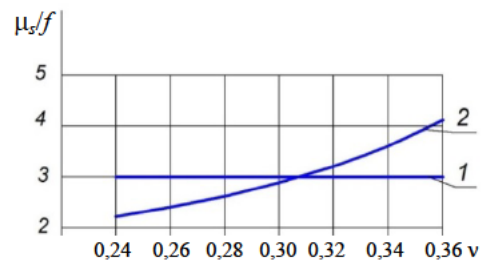


Рис. 2. Отношение коэффициента пластического трения Зибеля μ_s к коэффициенту трения Кулона f :
 1 – расчет по модели внедрения жесткой сферы в идеальное пластическое полупространство;
 2 – расчет по микроконтактной адгезионной модели в соответствии с формулой (22)

Fig. 2. Ratio of the Siebel plastic friction coefficient μ_s to the Coulomb friction coefficient f :
 1 – calculation using the model of introducing a rigid sphere into an ideal plastic half-space;
 2 – calculation using the microcontact adhesion model in accordance with formula (22)

При этом, как видно из рис. 2, результаты расчетов по микроконтактной адгезионной модели и модели внедрения жесткой сферы в идеальное пластическое полупространство совпадают при коэффициенте Пуассона $\nu = 0,31$. В диапазоне $\nu = 0,28–0,33$, характерном для наиболее распространенных сочетаний металлических пар трения, расхождения также не превышают 13 %, что для технических расчетов вполне допустимо. По мере дальнейшего отклонения от рассмотренного диапазона $\nu = 0,28–0,33$ наблюдается более заметное расхождение результатов.

При практическом использовании формул (22) и (23) необходимо учитывать, что коэффициент трения f должен быть определен при давлениях, когда закон трения Кулона применим (номинальные контактные давления существенно меньше предела текучести более мягкого материала пары). При более высоких

давлениях, сопровождающихся пластическим течением в объеме материала или пластическим «пропахиванием» поверхностных слоев, удельные силы трения нелинейно зависят от контактного давления и понятие «коэффициент трения» становится условным, поскольку эта величина при таких давлениях не может рассматриваться как константа [1, 8, 9].

ВЫВОДЫ

1. Результаты выполненных исследований параметров напряженного состояния микроступов поверхностных слоев контактирующих материалов позволили осуществить теоретическое обоснование взаимосвязи коэффициентов трения Зибеля и Кулона для пластичных материалов на основе адгезионной теории трения и микроконтактной модели упругопластического деформирования шероховатых поверхностей.

2. Получена аналитическая зависимость, связывающая коэффициенты трения Кулона и Зибеля, а также коэффициент Пуассона подвергаемого пластическому деформированию материала из контактирующей пары. На примере углеродистых и легированных сталей, а также цветных металлов и сплавов произведена расчетная оценка взаимосвязи коэффициентов трения Зибеля и Кулона для широкого диапазона изменения коэффициента Пуассона. Рассчитанные значения удовлетворительно согласуются с имеющимися экспериментальными данными.

3. Результаты исследований могут быть использованы в учебном процессе при изучении дисциплин, связанных с обработкой материалов давлением, а также в инженерной и научно-исследовательской практике.

Обозначения:

A_n – номинальная площадь касания; A_r – площадь фактического контакта; c – коэффициент; f – коэффициент трения Кулона; f_{\max} – максимальное значение коэффициента трения Кулона; F_T – сила трения; m – «фактор трения» Зибеля; P – действующее усилие; p – давление; p_m – среднее контактное давление; p_0 – наибольшие напряжения в зоне контакта (напряжения Герца); μ_s – коэффициент пластического трения Зибеля; $\mu_{s\max}$ – максимальное значение коэффициента пластического трения Зибеля;

ν – коэффициент Пуассона; σ_{redA} – эквивалентные напряжения в точке A ; σ_s – предел текучести при растяжении и сжатии; τ – удельные силы трения; τ_s – предел текучести на сдвиг; τ_a – удельные силы адгезионного сцепления; η – относительная площадь фактического контакта.

Nomenclature:

A_n – nominal contact area; A_r – actual contact area; c – coefficient; f – Coulomb friction coefficient; f_{\max} – maximum value of Coulomb's friction coefficient; F_T – friction force; m – Siebel's "friction factor"; P – effective force; p – pressure; p_m – average contact pressure; p_0 – greatest stresses in the contact zone (Hertz stresses); μ_s – Siebel's plastic friction coefficient; $\mu_{s\max}$ – maximum value of Siebel's plastic friction coefficient; ν – Poisson's ratio; σ_{red} – equivalent stresses; σ_s – yield strength in tension and compression; τ – specific friction forces; τ_s – shear yield strength; τ_a – specific adhesive bond forces; η – relative actual contact area.

ЛИТЕРАТУРА

1. Оценка работоспособности ПТФЭ-композиатов в качестве антифрикционных слоев опорных частей с шаровым сегментом. / А. А. Адамов, И. Э. Келлер, Д. С. Петухов [и др.] // Трение и износ, 2023. Т. 44, № 3. С. 201–211. <https://doi.org/10.32864/0202-4977-2023-44-3-201-211>.
2. Мышкин, Н. К. Трение, смазка, износ. Физические основы и технические приложения трибологии / Н. К. Мышкин, М. И. Петроковец. М.: Физматлит, 2007. 368 с.
3. Wagoner, R. H. Fundamentals of Metal Forming / R. H. Wagoner, J.-L. Chenot. NY: John Wiley, 1997. 389 p.
4. Метод определения коэффициента трения при холодной прокатке особо тонких листов / В. А. Томило, С. В. Пилипенко, А. В. Дудан [и др.] // Трение и износ. 2024. Т. 45, № 3. С. 220–226. <https://doi.org/10.32864/0202-4977-2024-45-3-220-226>.
5. Худяков, А. Ю. Анализ известных зависимостей и разработка новых уравнений прессования мелкофракционных материалов горно-металлургического комплекса / А. Ю. Худяков, С. В. Ващенко // Новые огнеупоры. 2019. № 12. С. 37–46.
6. Isherwood, D. P. Some Observation of die Wall Friction Effects on the Compaction of Polymer / D. P. Isherwood // Powder Technology, 1987. Vol. 48, No 3. P. 253–262. [https://doi.org/10.1016/0032-5910\(86\)80050-x](https://doi.org/10.1016/0032-5910(86)80050-x).
7. Методика экспресс-оценки параметров внутреннего трения в брикетах пресс-материала / В. В. Барсуков, В. Тарасюк, В. М. Шаповалов, Б. Крупич [и др.] // Трение и износ. 2017. Т. 38, № 1. С. 41–48.
8. Kendal, K. Inadequacy of Coulomb's Friction Law for Particle Assemblies / K. Kendal // Nature. 1986. Vol. 319. P. 203–205. <https://doi.org/10.1038/319203a0>.
9. Барсуков, В. Г. Технологическое трение при экструзии композитов / В. Г. Барсуков, А. И. Свириденко. Гродно: ГРГУ, 1998. 201 с.
10. Mróz, Z. Constitutive model of Adhesive and Ploughing Friction in Metal – Forming Processes / Z. Mróz, S. Stupkiewicz // International Journal of Mechanical Sci-

- ences. 1998. Vol. 40, № 2–3. P. 281–303. [https://doi.org/10.1016/s0020-7403\(97\)00055-6](https://doi.org/10.1016/s0020-7403(97)00055-6).
11. Лаптев, А. М. Построение диаграммы для определения коэффициента трения в формуле Леванова по методу осадки кольца / А. М. Лаптев, Я. Ю. Ткаченко, В. И. Жабин // Обработка материалов давлением. 2011. № 3 (28). С. 129–132.
 12. Siebel, E. Grundlagen und Begriffe der Bildsamen Formgebung / E. Siebel // *Werkstatttechnik und Maschinenbau*. 1950. No 40. S. 373–380.
 13. Писаренко, Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. Киев: Наукова думка, 1988. 736 с.
 14. Bowden, F. P. Friction and Lubrication of Solids / F. P. Bowden, D. Tabor. London: Oxford University Press. 1954. 424 p. <https://doi.org/10.1093/oso/9780198507772.001.0001>
 15. Свириденко, А. И. Механика дискретного фрикционного контакта / А. И. Свириденко, С. А. Чижик, М. И. Петроковец. Минск: Наука и техника, 1990. 272 с.
 16. Крупич, Б. Моделирование микроконтактных взаимодействий при газообразивном изнашивании сталей с учетом деформационного упрочнения / Б. Крупич, В. Г. Барсуков, А. И. Свириденко // Трение и износ. 2019. Т. 40, № 6. С. 644–653.
 17. Johnson, K. L. Contact Mechanics / K. L. Johnson. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. 414 p. <https://doi.org/10.1017/cbo9781139171731>.
 18. Енохович, А. С. Справочник по физике и технике / А. С. Енохович. М.: Просвещение, 1989. 224 с.
 19. Stachowiak, G. W. Engineering Tribology / G. W. Stachowiak, A. W. Batchelor. 4th ed. Elsevier Science: Butterworth-Heinemann, 2016. 884 p.
 20. Триботехнические характеристики покрытий на основе бронзы БрА7Н6Ф после оплавления оптоволоконным лазером / О. Г. Девойно, Е. Э. Фельдштейн, А. Я. Григорьев [и др.] // Трение и износ. 2023. Т. 44, № 1. С. 12–19. <https://doi.org/10.32864/0202-4977-2023-44-12-19>.
- Поступила 10.01.2025
Подписана в печать 14.03.2025
Опубликована онлайн 30.05.2025
- REFERENCES
1. Adamov A. A., Keller I. E., Petukhov D. S., Kuzminykh V. S., Patrakov I. M., Grakovich P. N., Shilko I. S. (2023) Evaluation of the Performance of PTFE Composites as Antifriction Layers of Bearing Parts with a Spherical Segment. *Journal of Friction and Wear*, 44 (3), 127–134. <https://doi.org/10.3103/s1068366623030029>.
 2. Myshkin N. K., Petrokovets M. I. (2007) *Friction, Lubrication, Wear. Physical Fundamentals and Engineering Applications of Tribology*. Moscow, Fizmatlit Publ. 368 (in Russian).
 3. Wagoner R., Chenot J.-L. (1997) *Fundamentals of Metal Forming*. NY, John Wiley. 389.
 4. Tomilo V. A., Pilipenko S. V., Dudan A. V., Shtempel O. P., Vigerina T. V. (2024) Method for Determining the Friction Coefficient in Cold Rolling of Ultra-Thin Sheets. *Journal of Friction and Wear*, 45 (3), 147–151. <https://doi.org/10.3103/s1068366624700223>.
 5. Khudyakov A. Yu., Vashchenko S. V. (2019) Analysis of Known Dependencies and Development of New Equations for Pressing Fine-Grained Materials of the Mining and Metallurgical Complex. *Novye Ogneupory = New Refractories*, (12), 37–46 (in Russian).
 6. Isherwood D. P. (1987) Some Observation of Die Wall Friction Effects on the Compaction of Polymer. *Powder technology*, 48 (3), 253–262. [https://doi.org/10.1016/0032-5910\(86\)80050-x](https://doi.org/10.1016/0032-5910(86)80050-x)
 7. Barsukov V. V., Tarasiuk W., Shapovalov V. M., Krupich B., Barsukov V. G. (2017) Express Evaluation Method of Internal Friction Parameters in Molding Material Briquettes. *Journal of Friction and Wear*, 38 (1), 71–76. <https://doi.org/10.3103/s1068366617010032>.
 8. Kendal K. (1986) Inadequacy of Coulomb's Friction Law for Particle Assemblies. *Nature*, 319, 203–205. <https://doi.org/10.1038/319203a0>.
 9. Barsukov V. G., Sviridenok A. I. (1998) *Technological Friction during Extrusion of Composites*. Grodno, Publishing House of Grodno State University. 201 (in Russian).
 10. Mróz Z., Stupkiewicz S. (1998) Constitutive Model of Adhesive and Ploughing Friction in Metal – Forming Processes. *International Journal of Mechanical Sciences*, 40 (2–3), 281–303. [https://doi.org/10.1016/s0020-7403\(97\)00055-6](https://doi.org/10.1016/s0020-7403(97)00055-6).
 11. Laptev A. M., Tkachenko Ya.Yu., Zhabin V. I. (2011) Construction of a Diagram for Determining the Friction Coefficient in the Levanov's Formula Using the Ring Upsetting Method. *Obrabotka Materialov Davleniem [Material Processing by Pressure]*, (3), 129–132 (in Russian).
 12. Siebel E. (1950) Grundlagen und Begriffe der Bildsamen Formgebung. *Werkstatttechnik und Maschinenbau*, (40), 373–380 (in German).
 13. Pisarenko G. S., Yakovlev A. P., Matveev V. V. (1988) *Handbook on Strength of Materials*. Kyiv, Naukova Dumka Publ. 736 (in Russian).
 14. Bowden F. P., Tabor D. (1954) *Friction and Lubrication of Solids*. London, Oxford University Press. 424 <https://doi.org/10.1093/oso/9780198507772.001.0001>
 15. Sviridenok A. I. Chizhik S. A., Petrokovets M. I. (1990) *Mechanics of Discrete Frictional Contact*. Minsk, Nauka i Tekhnika Publ. 272 (in Russian).
 16. Krupich B., Barsukov V. G. and Sviridenok A. I. (2019) Simulation of Microcontact Interactions during Gas-Abrasive Wearing of Steels with Allowance for Strain Hardening. *Journal of Friction and Wear*, 40 (6), 488–494. <https://doi.org/10.3103/S106836661906014X>.
 17. Johnson K. L. (1985) *Contact Mechanics*. Cambridge, Cambridge University Press. 414. <https://doi.org/10.1017/cbo9781139171731>.
 18. Enochovich A. S. (1989) *Handbook of Physics and Technology*. Moscow, Prosveshchenie Publ. 224 (in Russian).
 19. Stachowiak G. W., Batchelor A. W. (2016) *Engineering tribology*. 4th ed. Butterworth-Heinemann, Elsevier Science. 884. <https://doi.org/10.1016/B978-0-7506-7836-0.X5000-7>.
 20. Devoyno O. G., Feldshteyn E. E., Grigoriev A. Ya, Basinyuk V. L., Kardopolova M. A., Kosiakova I. M. (2023) Tribological Characteristics of Coatings Based on Bronze BrA7N6F After Melting with a Fiber Optic Laser. *Journal of Friction and Wear*, 44 (1), 12–19. <https://doi.org/10.3103/s1068366623010038>.

Received: 10.01.2025

Accepted: 14.03.2025

Published online: 30.05.2025