

Для вычисления  $u_k(x)$  при  $x_3 = 0$  можно использовать экстраполяционные формулы, опирающиеся на использование выражений для  $\tilde{K}_1$ ; при  $x_3 \neq 0$ . Этот метод использован для вычисления перемещений точек полупространства под действием равномерно распределенной по квадрату  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  нагрузки  $q_1 = 1, q_2 = q_3 = 0$ . Результаты численных расчетов для  $x_3 = 0, x_3 = 0,5, x_3 = 0,75$  представлены на рис. 1.

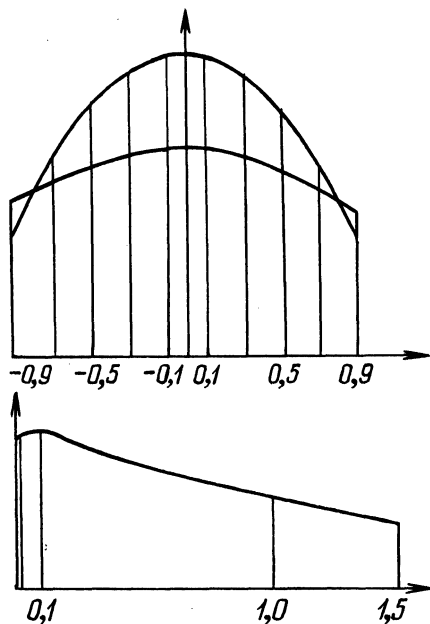


Рис. 1. Перемещения точек полупространства под действием равномерно распределенной по квадрату нагрузки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л и ф ш и ц И.М., Р о з е н ц в е й г Л.Н. О построении тензора Грина для основного уравнения теории упругости в случае неограниченной упруго-анизотропной среды. — ЖЭТФ, 1947, вып. 9, т. 17, с. 783—791.
2. Б е р е с н е в А.Н. Термоупругие напряжения в ортотропном прямоугольном параллелепипеде. — Ученые записки Кемеровского госпединститута, 1970, вып. 23, с. 95—112.
3. D e d e r i c h s P.H., L e i b f r i e d G. Elastic Green's Function for Anisotropic Cubic Crystals. Physical Review, v. 188, n. 3, 1969, p. 1175—1183.

УДК 624.072.620

Н.Н.БУТКЕВИЧ, канд.техн.наук,  
Е.Н.ЛАМБИНА, канд.физ.-мат.наук,  
Ф.И.ПОДГАЙСКИЙ, ассистент (БПИ)

#### ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИН ТРЕУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ, ЗАЩЕМЛЕННЫХ ПО ПЕРИМЕТРУ

В работе исследовалось влияние граничных условий на напряженное состояние треугольной пластины. Задача решалась как плоская.

Экспериментальное исследование напряженного состояния проводилось методом фотоупругости на низкомодульном оптически чувствительном материале (полиуретан СКТ-5) для двух

схем нагружения: I — нагрузка, распределенная по периметру (рис. 1); II — нагрузка приложенная в центре пластины нормально к ее плоскости.

Нагружение по схеме I осуществлялось на пластинах, имеющих форму равнобедренного треугольника с различными соотношениями боковой стороны к основанию: 1, 0,7, 1,5. Пластина жестко скреплялась со стальными стержнями по периметру так, что вершины ее оставались свободными от нагрузки. Нагрузка на пластину передавалась через жесткие стержни. При нагружении по схеме II стержни жестко защемлялись в неподвижных опорах. При таком способе нагружения перемещения касательные к контуру были стеснены, а контурные напряжения  $\sigma_x, \sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  были отличны от нуля.

На рис. 2,а представлены результаты фотоупругих данных в виде картины полос (линии равных значений  $\sigma_1 - \sigma_2$ ) и траекторий  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  для равносторонней треугольной пластины. По картине полос было установлено, что в центральной части пластины

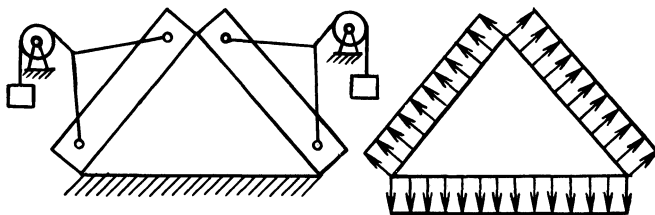


Рис. 1. Схема нагружения треугольной пластины по варианту I.

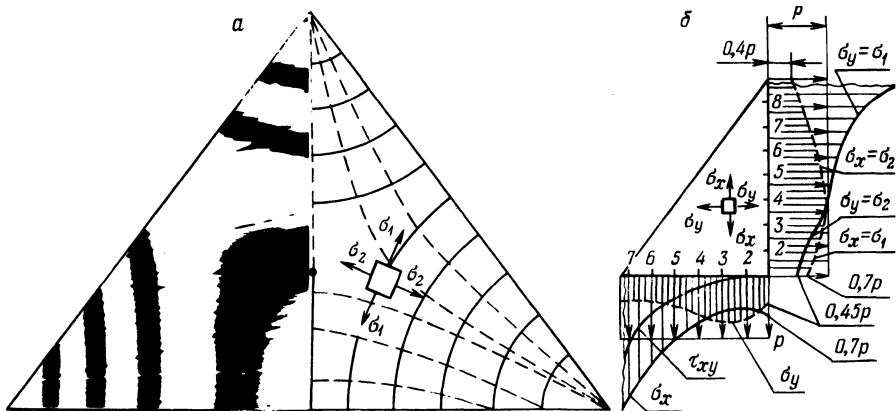


Рис. 2. Распределение напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  в треугольной пластине нагруженной по схеме I : а — картина полос ( $\sigma_1 - \sigma_2$ ) и траектории  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  б — распределение  $\sigma_x, \sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  по высоте и основанию пластины.

имеется изотропная область ( $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$ ), характеризующая однородное напряженное состояние. Величина и расположение изотропной области зависят от формы периметра. В равностороннем треугольнике она занимает центральную область величиной около  $0,25r$ , где  $r$  — радиус вписанной окружности. В треугольнике с острой вершиной (соотношение боковой стороны и основания 1,5) изотропная область увеличивается, перемещаясь ближе к основанию, в треугольнике с тупым углом при вершине (соотношение 0,7) изотропная область также увеличивается, перемещаясь к вершине.

На рис. 2,б приведены эпюры  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  по высоте и основанию пластины для нагружения по схеме а. Величины напряжений даны в функции от интенсивности нагрузки по периметру. Из рис. 2,а,б видно, что наибольшие растягивающие напряжения возникают по углам пластины, а линия действия наибольшего растягивающего напряжения ( $\sigma_1$ ) является биссектрисой угла. Таким образом, опасными направлениями являются биссектрисы углов, а центром изотропной области — точки пересечения биссектрис.

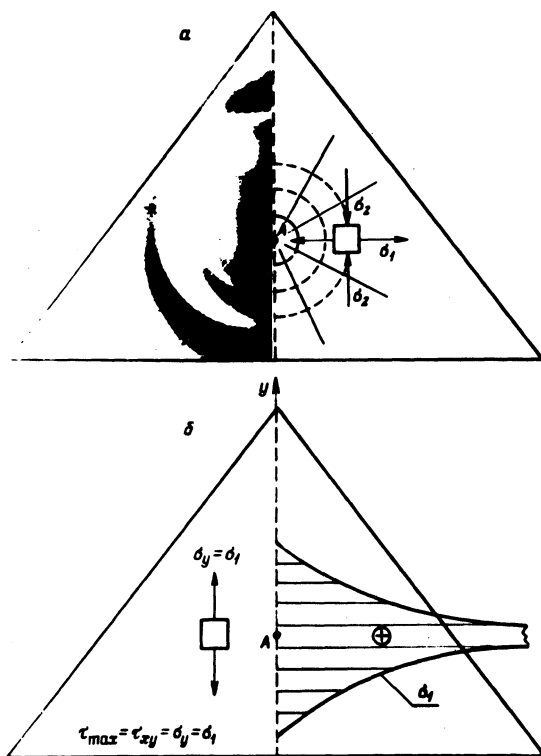


Рис. 3. Распределение напряжений  $\sigma_1$  в треугольной пластине, нагруженной по схеме II : а — картина полос и траектории  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ ; б — распределение  $\sigma_1$  по высоте пластины.

На рис. 3,а,б представлены фотоупругие данные и результаты расчета напряженного состояния пластины, нагруженной по схеме II. В отличие от нагружения по схеме I при таком виде нагружения влияние граничных условий слабо влияет на величину и характер напряженного состояния в центре пластины. На рис. 4 представлена результирующая эпюра максимальных растягивающих напряжений  $\sigma_1$  по высоте (биссектрисе) треугольной пластины равностороннего периметра при одновременном действии нагрузок по схемам I и II. При таком комбинированном нагружении для напряжения  $\sigma_1$  появляется два максимума и если учесть, что в равносторонней пластине главный максимум приходится на центр симметрии, то здесь действуют максимальные растягивающие напряжения по всем направлениям.

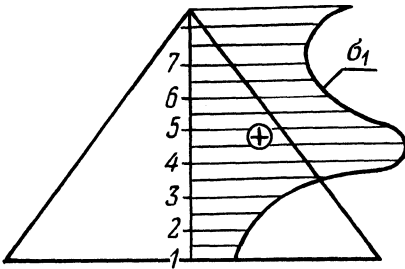


Рис. 4. Распределение напряжения  $\sigma_1$  по высоте пластины при действии комбинированной нагрузки.

Параллельно с экспериментами проводился теоретический расчет на определение размеров изотропной области для случая нагружения по схеме I. Расчет производился методом Г.В.Колосова и Н.И.Мусхелишвили [1]. Если назвать комплексным перемещением величину  $u = u_x + iu_y$ , где  $u_x$  и  $u_y$  — проекции перемещения на оси  $x$  и  $y$  соответственно, то  $u$  может быть выражено через две аналитические функции

$\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ ;

$$2\mu u = \infty\varphi(z) - z\bar{\varphi}'(z) - \bar{\psi}(z), \quad z = x + iy, \quad (1)$$

где  $\mu = \frac{E}{2(1+\gamma)}$ ;  $\infty = \frac{3-\gamma}{1-\gamma}$ .

Здесь  $E$  — модуль Юнга;  $\gamma$  — коэффициент Пуассона (для полиуретана  $\infty = 1,76$ ).

Отобразим область треугольника на единичный круг  $|\xi| = 1$ . Отображающую функцию находим при помощи интеграла Кристоффеля—Шварца:

$$z = \omega(\xi) = \frac{1}{1,776} \cdot \int_0^\xi (1-t^3)^{-\frac{2}{3}} dt. \quad (2)$$

При малых значениях  $\xi$  будем иметь

$$z = \frac{1}{1,776} \left( \xi + \frac{\xi^4}{6} \right). \quad (3)$$

Далее обозначим

$$\varphi_1(\xi) = \varphi(z(\xi)); \psi_1(\xi) = \psi(z(\xi)); u_1(\xi) = u(z(\xi)).$$

Соотношение (1) преобразуется к виду

$$\varkappa \varphi_1(\xi) - K(\xi) \overline{\varphi_1(\xi)} - \overline{\psi_1(\xi)} = u_1(\xi), \quad (4)$$

где  $K(\xi) = \frac{\omega(\xi)}{\overline{\omega'(\xi)}}$ .

В силу симметрии задачи

$$u(\xi e^{\frac{2\pi i}{3}}) = e^{\frac{2\pi i}{3}} u(\xi); u(\overline{\xi}) = \overline{u(\xi)},$$

Отсюда следует, что степенные ряды для  $\varphi(\xi)$  и  $\psi(\xi)$  имеют вид

$$\varphi_1(\xi) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_{\kappa} \xi^{3\kappa+1}; \quad \psi_1(\xi) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} b_{\kappa} \xi^{3\kappa+2},$$

где  $a_{\kappa}$  и  $b_{\kappa}$  — действительные коэффициенты.

Обозначим  $s = \xi \in L_1$ , где  $L_1$  — окружность  $|\xi| = 1$ , соответствующая при конформном преобразовании контуру  $L$  пластинки. Граничные условия для пластинки можно записать в виде

$$u_n = f \quad u_{\tau} = 0 \quad (f = \text{const}),$$

где  $u_n$  и  $u_{\tau}$  — нормальная и касательная составляющие перемещения соответственно. Переходя от  $L$  к  $L_1$  и разлагая граничное значение  $u_1$  в комплексный ряд Фурье, получим:

$$u_1|_{L_1} = T \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{3\kappa+1} \cdot s^{3\kappa+1}, \quad \text{где} \quad T = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} f.$$

Полагая в (4)  $\xi = s$ , находим граничное условие для  $\varphi_1(\xi)$  и  $\psi_1(\xi)$

$$\varkappa \varphi_1(s) - K(s) \overline{\varphi_1(s)} - \overline{\psi_1(s)} = T \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{3\kappa+1} \cdot s^{3\kappa+1}. \quad (5)$$

Если разложить функцию  $K(\overline{s})$  в ряд Лорана и подставить в (5) ряды для  $\varphi_1(s)$  и  $\psi_1(s)$ , то получим бесконечную алгебраическую систему для определения коэффициентов  $a_{\kappa}$  и  $b_{\kappa}$ . Значения коэффициентов  $a_0$  и  $b_0$  находятся приближенно:

$$a_0 = \frac{T}{\varepsilon - 1}; \quad b_0 = T \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

При малых значениях  $\xi$  с точностью до малых второго порядка

$$\begin{aligned} \psi_1 &= a_0 \xi; \quad K(\xi) = 1; \\ \psi_1 &= b_0 \xi^2; \quad Z(\xi) = \frac{1}{1,776} \xi. \end{aligned}$$

Уравнение (4) принимает вид

$$a_0 \xi (\varepsilon - 1) - b_0 \xi^2 = u_1(\xi).$$

В однородной области перемещения должны быть линейны. Следовательно, размеры этой области определяются возможностью пренебрежения слагаемыми  $b_0 \xi^2$  по сравнению с  $a_0 \xi (\varepsilon - 1)$ . Будем считать зону однородной (изотропной), если "отклонение от однородности" не превышает 2% при экспериментальном исследовании.

Тогда получим.

$$\begin{aligned} \frac{|b_0| |\xi|}{a_0 (\varepsilon - 1)} &\leq 2 \cdot 10^{-2}; \quad |\xi| \leq \frac{2 \cdot 10^{-2}}{\frac{1}{\varepsilon} - 0,5}; \\ |z| &\leq \frac{1}{1,776} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-2}}{\left( \frac{1}{\varepsilon} - 0,5 \right)}. \end{aligned}$$

Для полиуретана будем иметь  $|z| = 0,165$ . Принимая радиус описанной окружности равным единице, получаем, что однородная (изотропная) зона представляет круг радиуса 0,165R или 0,32r, где R и r - радиусы описанной и вписанной окружностей. Сравнение экспериментальных размеров однородной (изотропной) зоны с теоретическими дает расхождение 13%.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М у с х е л и ш в и л и Н.Н. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Изд-во АН СССР, 1954, с. 113, 186.