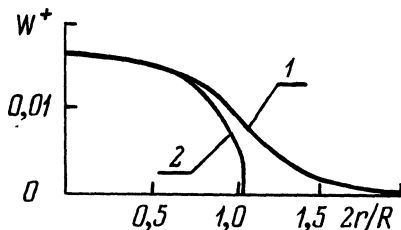


реализующая вычисление функций Грина, решение системы (7) и вычисление функции перемещения по формуле

$$w(r, \theta) = \sum_{j=1}^i P_j w_{kj}(r, \theta, r_j, \theta_j) + \sum_{j=1}^i M_{nj} w_{knj}(r, \theta, r_j, \theta_j) + \\ + \sum_{j=1}^i M_{tj} w_{ktj}(r, \theta, r_j, \theta_j) + w_q(r, \theta).$$

Рис. 2. Графики прогибов под сосредоточенной силой: 1 — кривая для точек с угловой координатой $\theta = 0$; 2 — $\theta = 1/3\pi$.



На рис 2 приведены графики прогиба в точке приложения единичных сил для треугольной сферической пологой оболочки вдоль радиусов при $\theta = 0$ и $\theta = 60^\circ$, если вершины плана оболочки имеют координаты (r, θ) ; $(R, 0)$; $(R, \frac{2}{3}\pi)$; $(R, \frac{4}{3}\pi)$, а малый подъем характеризуется числом $a_0 = 6$ (для пластины $a_0 = 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгаз, 1962, с. 310—314.
2. Новацкий В. Динамика сооружений. — М.: Стройиздат, 1963, с. 341—343.
3. Гурьянов Н.Г. Непологая сферическая оболочка, находящаяся под действием локальной нагрузки. — В сб.: Исследование по теории пластин и оболочек, 1960, № 6, с. 230.
4. Лужин О.В. Приложение методов упругости и пластичности к решению интегральных задач. — М.: Высшая школа, 1974, с. 141—171.

УДК 539.3

М.Д.МАРТЫНЕНКО, докт. физ.-мат. наук,
Н.И.ИЛЬИНКОВА, ст. инженер (БГУ)

ИЗГИБ СВОБОДНО ОПЕРТОЙ ПЛАСТИНКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С НАЧАЛЬНОЙ КРИВИЗНОЙ СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассматривается круглая пластинка переменной толщины, ограниченная с одной стороны плоскостью, с другой стороны — конической поверхностью большого угла раствора. До недавнего времени расчет таких пластин проводился в предположении,

что начальный изгиб срединной поверхности незначителен и применялись формулы расчета пластин с плоской срединной поверхностью [1–3]. Погрешность вычислений при этом не оценивалась.

В настоящей работе методом малого параметра решена задача об изгибе круглой пластинки указанной формы в предположении, что пластинка свободно опирается по контуру и деформируется равномерно-распределенной нагрузкой. Проведены численные расчеты и дано их сравнение с результатами [3].

1. Пусть толщина пластинки меняется по линейному закону (рис. 1, а)

$$h(r) = h_0 [1 + \lambda (2 \frac{r}{a} - 1)], \quad (1.1)$$

где a — внешний радиус пластинки.

Симметричный изгиб такой пластинки описывается следующей системой уравнений [4]:

$$\frac{d(N_r \cdot r)}{dr} - N_\theta + \frac{d}{dr}(Q \cdot r \cdot \varphi_0) + q_r \cdot r = 0; \quad (1.2)$$

$$\frac{d(Q \cdot r)}{dr} - \frac{d}{dr}(N_r \cdot r \cdot \varphi_0) + q_z \cdot r = 0; \quad (1.3)$$

$$\frac{d(M_r \cdot r)}{dr} - M_\theta - Q \cdot r = 0, \quad (1.4)$$

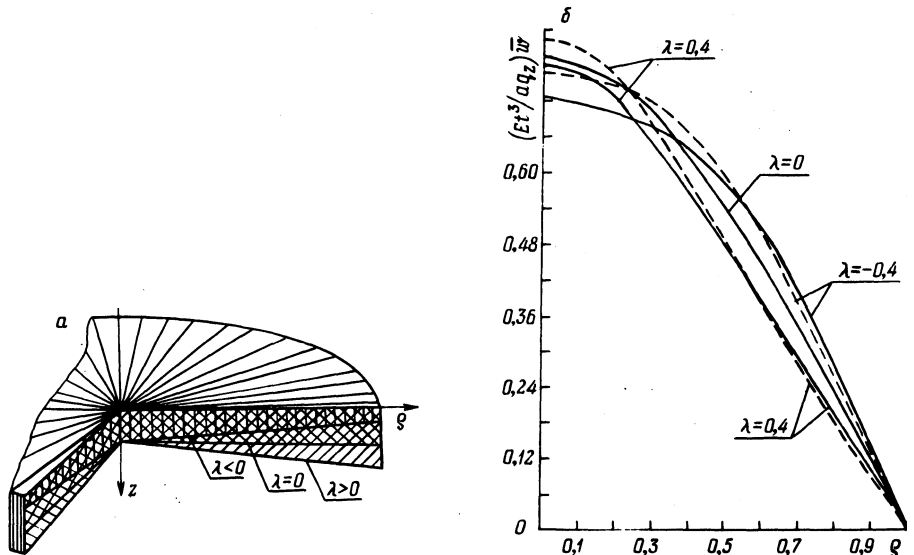


Рис. 1.

где использованы обозначения [5]; φ_0 — угол между нормалью к срединной поверхности и ее осью. Соотношения между усилиями, моментами и перемещениями в данном случае имеют вид:

$$N_r = A \left[\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} + \nu \varphi_0 \frac{\omega}{r} \right]; \quad (1.5)$$

$$N_\theta = A \left[\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} + \varphi_0 \frac{w}{r} \right]; \quad (1.6)$$

$$M_r = -D \left[\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right]; \quad (1.7)$$

$$M_\theta = -D \left[\nu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right], \quad (1.8)$$

где $A = \frac{E}{1-\nu^2}$; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона; u, w — компоненты вектора перемещения вдоль осей r и z .

Используя соотношения (1.5)–(1.8), получаем разрешающую систему уравнений равновесия в перемещениях:

$$\begin{aligned} & (1 + \varphi_0^2) t \rho [1 + \lambda(2\rho - 1)] \frac{d^2 \tilde{u}}{d\rho^2} + \left\{ (1 + \varphi_0^2) t [\lambda(4\rho - 1) + 1] + \right. \\ & \left. + \nu \varphi_0^2 t [1 + \lambda(2\rho - 1)] \right\} \frac{d\tilde{u}}{d\rho} + \left\{ (1 + \varphi_0^2) 2\nu \lambda t - \frac{t}{\rho} [1 + \lambda(2\rho - 1)] \right\} \tilde{u} + \\ & + \left\{ \nu \varphi_0 (1 + \varphi_0^2) + [1 + \lambda(2\rho - 1)] \right\} \frac{d\tilde{w}}{d\rho} + \left\{ 2\nu \varphi_0 (1 + \varphi_0^2) \lambda t - \right. \\ & \left. - \varphi_0 t \frac{[1 + \lambda(2\rho - 1)]}{\rho} \right\} \tilde{w} + \frac{1}{A_1} (q_r - \varphi_0 q_z) \rho = 0; \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} & \rho [1 + \lambda(2\rho - 1)]^3 \frac{d^3 \tilde{w}}{d\rho^3} + [1 + \lambda(2\rho - 1)]^2 \cdot [\lambda(8\rho - 1) + 1] \frac{d^2 \tilde{w}}{d\rho^2} + \\ & + [1 + \lambda(2\rho - 1)]^2 \left\{ \lambda [2(3\nu - 1) + \frac{1}{\rho}] - \frac{1}{\rho} \right\} \frac{d\tilde{w}}{d\rho} - \frac{12\nu \varphi_0^2}{t^2} [1 + \\ & + \lambda(2\rho - 1)] \tilde{w} - \frac{12\nu \varphi_0}{t^2} \rho [1 + \lambda(2\rho - 1)] \frac{d\tilde{u}}{d\rho} - \frac{12\nu \varphi_0}{t^2} [1 + \\ & + \lambda(2\rho - 1)] \tilde{u} + \frac{12}{A_1} \int_0^\rho q_z \rho d\rho = 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $A_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}$; $\tilde{u} = \frac{u}{a}$; $\tilde{w} = \frac{w}{a}$; $\rho = \frac{r}{a}$; $t = \frac{h_0}{a}$ — безразмерные переменные.

Предположим, что пластинка свободно опирается по контуру ($\rho = 1$) и находится под действием нормальной равномерно-распределенной нагрузки $q_z = \text{const}$ ($q_r = 0$). Граничные условия имеют вид:

$$N_r \Big|_{r=a} = 0; M_r \Big|_{r=a} = 0; \tilde{w} \Big|_{\rho=1} = 0; \frac{d\tilde{w}}{d\rho} \Big|_{\rho=1} = 0(1). \quad (1.11)$$

2. Нетрудно установить следующую зависимость между малыми параметрами λ и φ_0 :

$$\varphi_0 = \text{arctg}(\lambda t) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\lambda t)^{2k+1}}{2k+1}, \quad (2.1)$$

где $(\lambda t)^2 < 1$ для рассматриваемого класса пластин.

Решение задачи будем искать в виде:

$$\tilde{u}(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \tilde{u}_k(\rho); \quad (2.2)$$

$$\tilde{w}(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \tilde{w}_k(\rho), \quad (2.3)$$

где неизвестные коэффициенты $\tilde{u}_k(\rho)$ и $\tilde{w}_k(\rho)$ определяются из системы (1.9) — (1.10).

Граничные условия (1.11) преобразуются к виду

$$\left(\frac{d\tilde{u}_k}{d\rho} + \nu \frac{\tilde{u}_k}{\rho} + \nu \varphi_0 \frac{\tilde{w}_k}{\rho} \right) \Big|_{\rho=1} = 0; \left(\frac{d^2\tilde{w}_k}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{d\tilde{w}_k}{d\rho} \right) \Big|_{\rho=1} = 0;$$

$$\tilde{w}_k \Big|_{\rho=1} = 0; \frac{d\tilde{w}_k}{d\rho} \Big|_{\rho=1} = 0(1), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Подставляя разложения (2.2) — (2.3) в систему уравнений (1.9) — (1.10) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра λ , получим системы дифференциальных уравнений для определения неизвестных \tilde{u}_k и \tilde{w}_k . Последовательное интегрирование этих уравнений с учетом граничных условий (2.4) приводит к следующим выражениям для \tilde{u}_k и \tilde{w}_k :

$$\tilde{u}_0 = 0; \quad (2.5)$$

$$\tilde{u}_1 = \left[\frac{\nu + 2}{3(1 + \nu)} t^2 + \frac{2\nu^3 + 7\nu^2 - 2\nu - 7}{10(1 + \nu)^2} \right] Bt\rho + \frac{Bt^3}{3} \rho^2 +$$

$$+ \frac{2\nu^2 + 5\nu - 3}{8(1 + \nu)} Bt\rho^2 + \frac{1 - 4\nu}{80} Bt\rho^4 - \frac{3(3 + \nu)}{16(1 + \nu)} Bt; \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2 = & - \left[\frac{18\nu^5 + 101\nu^4 + 105\nu^3 - 61\nu^2 - 123\nu - 40}{60(1 + \nu)^3} + \right. \\ & + \frac{5\nu^3 + 25\nu^2 + 31\nu + 11}{36(1 + \nu)^2} t^2 \left. \right] Bt\rho + \frac{10\nu^2 + 81\nu - 19}{600} Bt\rho^5 + \\ & + \frac{3 - 12\nu}{180} Bt\rho^4 - \frac{\nu + 5}{12} Bt^3\rho^3 - \frac{2\nu^3 + 7\nu^2 + 2\nu - 3}{8(1 + \nu)} Bt\rho^3 + \\ & + \frac{2\nu^2 + 9\nu + 7}{9(1 + \nu)} Bt^3\rho^2 + \frac{64\nu^4 + 306\nu^3 + 223\nu^2 + 126\nu - 107}{120(1 + \nu)} Bt\rho^2 - \\ & - \frac{64\nu^3 + 377\nu^2 + 262\nu - 51}{400(1 + \nu)^2} Bt; \quad (2.7) \end{aligned}$$

$$\tilde{w}_0 = \frac{3}{16} B\rho^4 - \frac{3}{8} B \frac{(3 + \nu)}{(1 + \nu)} \rho^2 + \frac{3}{16} B \frac{(5 + \nu)}{(1 + \nu)}; \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1 = & - \frac{24\nu^3 + 129\nu^2 + 156\nu + 51}{40(1 + \nu)^2} B\rho^2 - \frac{3}{50} (11 + \nu) B\rho^5 + \\ & + \frac{9}{16} B\rho^4 + \frac{\nu^2 + 4\nu + 3}{2(1 + \nu)} B\rho^3 + \frac{64\nu^3 + 377\nu^2 + 262\nu - 51}{400(1 + \nu)^2} B; \quad (2.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_2 = & - \left[\frac{18\nu^5 + 128\nu^4 + 279\nu^3 + 239\nu^2 + 63\nu - 7}{20(1 + \nu)^3} + \right. \\ & + \frac{5\nu^3 + 22\nu^2 + 31\nu + 14}{12(1 + \nu)^2} t^2 \left. \right] B\rho^2 + \frac{\nu^2 + 15\nu + 104}{60} B\rho^6 - \\ & - \frac{6(11 + \nu)}{25} B\rho^5 - \frac{3\nu^3 + 18\nu^2 + 24\nu + 9}{8(1 + \nu)} B\rho^4 - \frac{\nu + 2}{8} Bt^2\rho^4 + \\ & + \frac{32\nu^4 + 204\nu^3 + 380\nu^2 + 276\nu + 68}{30(1 + \nu)^2} B\rho^3 + \frac{4\nu^2 + 12\nu + 8}{9(1 + \nu)} Bt^2\rho^3 + \\ & + \frac{115\nu^5 + 884\nu^4 + 1911\nu^3 + 1279\nu^2 - 214\nu - 351}{600(1 + \nu)^3} B + \\ & + \frac{7\nu^3 + 40\nu^2 + 71\nu + 38}{72(1 + \nu)^2} Bt^2; \quad (2.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_3 = & -\frac{40\nu^3 + 853\nu^2 + 8189\nu + 50195}{12250} B\rho^7 + \frac{\nu^2 + 15\nu + 104}{12} B\rho^6 + \\
& + \left[\frac{8\nu^4 + 83\nu^3 + 271\nu^2 + 73\nu - 204}{50(1+\nu)} + \frac{4\nu^2 + 39\nu + 97}{75} t^2 \right] B\rho^5 + \\
& + \left[-\frac{128\nu^5 + 1204\nu^4}{160(1+\nu)^2} - \frac{3917\nu^3 + 5140\nu^2 + 2735\nu + 436}{160(1+\nu)^2} - \right. \\
& \left. - \frac{8\nu^3 + 67\nu^2 + 139\nu + 74}{24(1+\nu)} t^2 \right] B\rho^4 + \left[\frac{48\nu^6 + 428\nu^5 + 1338\nu^4 + 1987\nu^3}{+1413\nu^2 + 385\nu + 1} + \right. \\
& \left. \frac{30(1+\nu)^3}{14\nu^5 + 169\nu^4 + 773\nu^3 + 1561\nu^2} + \right. \\
& \left. + \frac{5\nu^4 + 54\nu^3 + 152\nu^2 + 162\nu + 59}{27(1+\nu)^2} t^2 \right] B\rho^3 + \left[\frac{-3607052\nu^4 + 5121238\nu^3 + 4178792\nu^2}{-1361987\nu + 6940} - \right. \\
& \left. \frac{49920\nu^7 + 476144\nu^6 + 1721903\nu^5}{42000(1+\nu)^3} - \frac{49920\nu^7 + 476144\nu^6 + 1721903\nu^5 + 3607052\nu^4 + 5121238\nu^3 + 4178792\nu^2}{42000(1+\nu)^3} \right] B\rho^2 \\
& - \frac{49920\nu^7 + 476144\nu^6 + 1721903\nu^5 + 3607052\nu^4 + 5121238\nu^3 + 4178792\nu^2}{21000(1+\nu)^3}
\end{aligned}$$

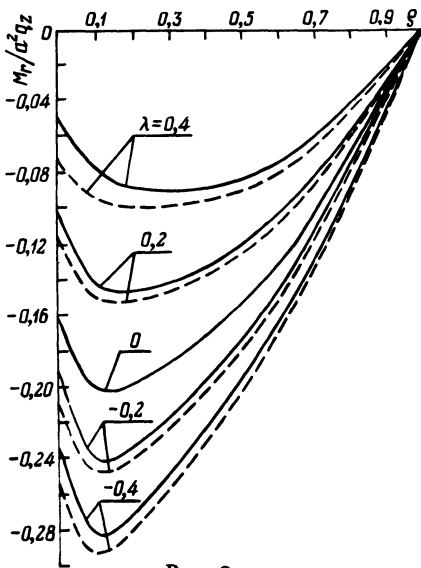


Рис. 2.

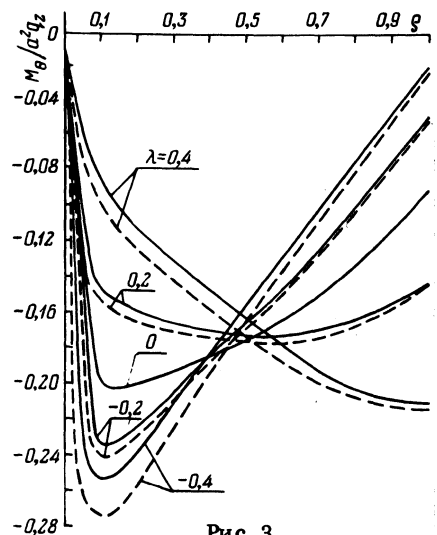


Рис. 3.

$$-\frac{1361987\nu - 6940}{21000(1 + \nu)^3} B + \frac{14\nu^5 + 169\nu^4 + 773\nu^3 + 1561\nu^2 + 1379\nu + 430}{18(1 + \nu)^2} Bt^2 \quad (2.11)$$

На рис. 1—3 изображены распределения вертикального прогиба w и изгибающих моментов M_r и M_θ по радиусу пластинки в зависимости от величины и знака параметра λ ($\nu = 0,25$). Штриховой линией обозначены соответствующие значения w , M_r и M_θ , полученные в [3]. Численные расчеты проводились по указанным формулам с использованием четырех членов в рядах (2.2)—(2.3) (по аналогии с [3]). Как показывает сравнение полученных результатов с результатами [3], с увеличением параметра λ растет погрешность, которая вносится в расчеты прогиба и изгибающих моментов пренебрежением начальной кривизной срединной поверхности. Эта погрешность может достигать 25% при определении изгибающих моментов в центральной части пластинки, у которой жесткость на изгиб является минимальной в центре ($\lambda = 0,4$; рис. 1,а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л у р ь е А.Е. К задаче о равновесии пластины переменной толщины. Тр. Ленингр.индустр. ин-та, раздел физ.-мат.наук, 1936, № 6, с. 57—80.
2. Т и м о ш е н к о С.П., В о й н о в с к и й — К р и г е р С. Пластинки и оболочки. — М.: Наука, 1966. — 635 с.
3. F a v r e Н., C h a b l o z E. Etude des plaques circulaires flechies d'epaisseur lineairement variable. — Angew. Math. Phys., vol. 1, 1950, p. 317—338.
4. М а р т ы н е н к о М.Д., И л ь и н к о в а Н.И. Изгиб тонких круглых пластин переменной толщины. — Вестн АН БССР, сер.физ.-мат.наук, 1980, № 3, с. 17—24.
5. К о в а л е н к о А.Д. Круглые пластины переменной толщины. — М.: Физматгиз, 1959. — 294 с.

УДК 539.3

В.С.РОМАНЧИК, канд.физ.-мат. наук (БГУ),
Л.П.КНЯЗЕВА, ст. инженер (БГУ)

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КУБИЧЕСКИ-АНИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Решена задача упругого равновесия кубически-анизотропного полупространства при заданных на его границе напряжениях. Полученное решение позволяет строить интегральные уравнения контактных задач для упругого полупространства.

Пусть кубически-анизотропная среда занимает область V , представляющую полупространство $x_3 > 0$. Напряженно-деформированное состояние среды определяется уравнениями [1—3]: