

Таким образом, наблюдаемые в эксперименте особенности разрушения образца по линии В объясняются значительной неравномерностью распределения напряжений по оси ОХ, а также неблагоприятным сочетанием максимальных сжимающих и растягивающих напряжений в средней части образца.

В начальный период времени имеет место лишь количественный рост напряжений в образце, положение зоны максимальных напряжений изменяется незначительно (рис. 3,б,в,г,д). При этом вторая по уровню область максимальной интенсивности напряжений непосредственно примыкает к ребру  $x = 0,0$ ;  $z = 0,5$ , а наиболее быстрый рост всех компонентов напряжений наблюдается на плоскости, проходящей через центр образца и ребро. На рис. 3,г проекция этой плоскости на плоскость ХОZ показана прерывистой линией АБ.

Таким образом, расчетные плоскости разрушения образуют угол  $45^\circ$  с основанием образца, что хорошо согласуется с данными опытов [2].

Следует отметить, что в течение всего рассматриваемого промежутка времени расчетные значения тех компонентов напряжений, которые на поверхности образца должны равняться нулю, имели величину на 1—2 порядка меньше максимальной величины напряжений. Это свидетельствует об удовлетворительном выполнении динамических граничных условий задачи, а также о достаточной степени достоверности предварительно найденных форм собственных колебаний образца.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ионов В.Н., Огибалов П.М. Напряжения в телах при импульсивном нагружении. — М.: Высшая школа, 1975. — 463 с.
2. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах. — М.: Изд. иностр. лит., 1955. — 192 с.
3. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. — Минск: Наука и техника, 1967. — 228 с.

УДК 621.791.541.65

Г.Ф.ЕРШОВ, докт.техн.наук (БПИ),  
Э.Г.КОСЫХ, канд.техн.наук (ГПИ)

#### РАСЧЕТ ПОЛИГОНАЛЬНЫХ В ПЛАНЕ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Решая задачу изгиба пологой сферической оболочки сосредоточенной силой  $P$  в произвольной точке  $(r_0, \theta_0)$  для разрешающей комплексной функции, уравнение примет вид [1]

$$\Delta\Delta\tilde{F} - i\Delta\tilde{F} = \frac{P}{r_0} \delta_{2\pi}(r-r_0, \theta-\theta_0),$$

где  $r, \theta$  — координаты полярной системы;  $\delta_{2\pi}(x-\xi, \theta - \gamma)$  — двумерная периодическая дельта-функция.

Разлагая  $\tilde{F}$  и  $\delta_{2\pi}$  в ряд по углу  $\theta$  для коэффициентов, получим следующее уравнение:

$$\Delta_n \Delta_n \tilde{F}_n - i\Delta \tilde{F}_n = \frac{P}{2\pi r_0} \delta(r-r_0).$$

Используя преобразования Ханкеля [2], а также формулу Неймана для цилиндрических функций [3]

$$J_n(uy) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n J_n(ur_0) J_n(ur) \cos n(\theta - \theta_0),$$

где

$$y^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0);$$

$$\delta_n = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 2, & n > 0, \end{cases}$$

получим частное решение разрешающего уравнения, соответствующее сосредоточенной силе

$$\tilde{F}(y) = \frac{iP}{2\pi} [K_0(\sqrt{iy}) + \ln y].$$

Отделяя вещественную и мнимые части, получим выражения для прогиба, соответствующие частному решению

$$w_r = \frac{1}{DK^2} \operatorname{Re} \tilde{F}(y)$$

и функции напряжений

$$F_r = R J_m \tilde{F}(y).$$

Общий интеграл однородной системы пологих сферических оболочек будет

$$w_0 = \frac{\sqrt{12(1-\mu^2)} PR}{2\pi E h^2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n (B_n r^n + C_{1n} b e_{r_n r} + C_{2n} b e_{i_n r}) \cos n(\theta - \theta_0),$$

$$F_0 = \frac{PR}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n (A_n r^n + C_{1n} b e_{i_n r} - C_{2n} b e_{r_n r}) \cos n(\theta - \theta_0).$$

Итак, общее решение для  $w$  и  $\varphi$  будет

$$w = w_r + w_0;$$

$$\varphi = F_r + F_0.$$

Сформулируем теперь граничные условия для конкретной оболочки, которую примем в качестве расширенной системы [4]. Пусть это будет жестко заземленный контур, совпадающий с окружностью радиуса  $r_K$ , т.е. имеем

$$W(r_K, \theta) = \frac{\partial w(r_K, \theta)}{\partial n} = \frac{\partial w(r_K, \theta)}{\partial t} = u(r_K, \theta) = v(r_K, \theta) = 0. \quad (1)$$

Перемещения  $u, v$  определяем по формулам

$$u = \frac{1}{\kappa R} [r w + \sum \delta_n \frac{B_n}{n+1} r^{n+1} \cos n(\theta - \theta_0)] + \frac{\kappa(1+\mu)}{Eh} \frac{\partial \varphi}{\partial r};$$

$$v = \frac{1}{\kappa R} \sum \delta_n \frac{B_n}{(n+1)} r^{n+1} \sin n(\theta - \theta_0) + \frac{\kappa(1+\mu)}{Eh} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

и удовлетворяя граничным условиям (1) и полагая  $P = 1$ , получим функции Грина

$$u(r, r_0; \theta, \theta_0); v(r, r_0; \theta, \theta_0); w(r, r_0; \theta, \theta_0). \quad (2)$$

Пусть теперь мы имеем пологую сферическую, полигональную в плане, оболочку (рис. 1), нагруженную единичной сосредоточенной силой в точке  $(r_0, \theta_0)$ . Выбирая в качестве расширенной системы оболочку, совпадающую в заданной области с исходной, но круглую в плане и нагруженную в той же точке, получим, что для заданной оболочки функции Грина определяются соотношением (2). Различие в работе исходной панели и области, с ней совпадающей в расширенной системе, заключено в различных условиях, наложенных на кромки. В первом случае они определяются граничными условиями, например, при жестком закреплении:

$$w(s_i) = \frac{\partial w(s_i)}{\partial n} = \frac{\partial w(s_i)}{\partial t} = u(s_i) = v(s_i) = 0, \quad (3)$$

где  $i = 1 \dots k$  — номер прямолинейного края исходной панели;  $s_i$  — текущая координата на  $i$ -й кромке, а во втором — условиями непрерывности и гладкости с остальной частью оболочки расширенной системы. Поэтому, налагая дополнительные связи по ли-

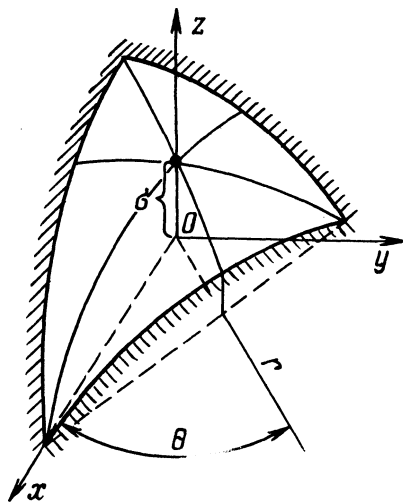


Рис. 1. Пологая сферическая оболочка, треугольная в плане, заземленная по контуру.

ниям, соответствующим кромкам исходной панели, и заменяя их действие эквивалентно действующими силами, задачу расчета исходной оболочки приведем к задаче определения этих неизвестных реактивных сил и дальнейшего расчета по известным формулам [1]. Так, согласно (3), вдоль  $i = x$  линий необходимо приложить силы:

$$q_w(s_i), q_u(s_i), q_v(s_i), m_n(s_i), m_t(s_i), \quad (4)$$

где индексы указывают, в каких направлениях ограничены перемещения и повороты.

Если несколько смягчить граничные условия, принимая вместо жесткого ограничения в касательной плоскости ограничения, накладываемые самой расширенной системой, то получим вместо (3)

$$w(s_i) = \frac{\partial w(s_i)}{\partial n} = \frac{\partial w(s_i)}{\partial t} = 0, \quad (5)$$

а список неизвестных силовых функций сократится до трех

$$q_w(s_i), m_n(s_i), m_t(s_i). \quad (6)$$

Используя принцип линейности, условия (5) приводят относительно (6) к системе интегральных уравнений первого рода. Решения их сводим к решению системы линейных уравнений, для чего заменяя непрерывные ограничения по контуру дискретными — в "к" точках, т.е. полагая точечные связи, в которых действуют неизвестные реакции

$$P_j = q_w(s^j); M_{nj} = m_n(s^j); M_{tj} = m_t(s^j).$$

Тогда вместо (5) получим линейную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^i (w_{kj} P_j + w_{knj} M_{nj} + w_{ктj} M_{tj}) + w_{кq} &= 0; \\ \sum_{j=1}^i (\theta_{kj} P_j + \theta_{knj} M_{nj} + \theta_{ктj} M_{tj}) + \theta_{кq} &= 0; \\ \sum_{j=1}^i (\psi_{kj} P_j + \psi_{knj} M_{nj} + \psi_{ктj} M_{tj}) + \psi_{кq} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

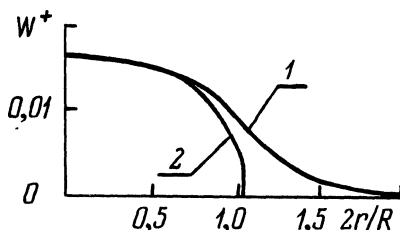
где  $(w_{kj}, w_{knj}, w_{ктj}); (\theta_{kj}, \theta_{knj}, \theta_{ктj}); (\psi_{kj}, \psi_{knj}, \psi_{ктj})$  — прогиб, повороты вокруг касательной и нормали к контуру в точке к от действия соответствующего сосредоточенного единичного усилия в точке j.

Для решения системы (7) составлена программа на ФОРТРАНе-IV

реализующая вычисление функций Грина, решение системы (7) и вычисление функции перемещения по формуле

$$w(r, \theta) = \sum_{j=1}^i P_j w_{kj}(r, \theta, r_j, \theta_j) + \sum_{j=1}^i M_{nj} w_{knj}(r, \theta, r_j, \theta_j) + \\ + \sum_{j=1}^i M_{tj} w_{ktj}(r, \theta, r_j, \theta_j) + w_q(r, \theta).$$

Рис. 2. Графики прогибов под сосредоточенной силой: 1 — кривая для точек с угловой координатой  $\theta = 0$ ; 2 —  $\theta = 1/3\pi$ .



На рис 2 приведены графики прогиба в точке приложения единичных сил для треугольной сферической пологой оболочки вдоль радиусов при  $\theta = 0$  и  $\theta = 60^\circ$ , если вершины плана оболочки имеют координаты  $(r, \theta)$ ;  $(R, 0)$ ;  $(R, \frac{2}{3}\pi)$ ;  $(R, \frac{4}{3}\pi)$ , а малый подъем характеризуется числом  $a_0 = 6$  (для пластины  $a_0 = 0$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгаз, 1962, с. 310—314. 2. Новацкий В. Динамика сооружений. — М.: Стройиздат, 1963, с. 341—343. 3. Гурьянов Н.Г. Непологая сферическая оболочка, находящаяся под действием локальной нагрузки. — В сб.: Исследование по теории пластин и оболочек, 1960, № 6, с. 230. 4. Лужин О.В. Приложение методов упругости и пластичности к решению интегральных задач. — М.: Высшая школа, 1974, с. 141—171.

УДК 539.3

М.Д.МАРТЫНЕНКО, докт. физ.-мат. наук,  
Н.И.ИЛЬИНКОВА, ст. инженер (БГУ)

### ИЗГИБ СВОБОДНО ОПЕРТОЙ ПЛАСТИНКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С НАЧАЛЬНОЙ КРИВИЗНОЙ СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассматривается круглая пластинка переменной толщины, ограниченная с одной стороны плоскостью, с другой стороны — конической поверхностью большого угла раствора. До недавнего времени расчет таких пластин проводился в предположении,