

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В КУБИЧЕСКОМ
ОБРАЗЦЕ ПРИ ИМПУЛЬСВНОМ НАГРУЖЕНИИ

Большой практический интерес представляет исследование распространения упругих волн в телах, линейные размеры которых являются величинами одного порядка [1, 2]. Настоящая статья посвящена теоретическому анализу распространения упругих волн в кубическом образце при импульсивном нагружении.

Граничные условия на поверхности куба приняты следующие: основание жестко закреплено

$$\vec{U}(x, y, z, t) = \{u; v; w\} = 0 \quad \text{при } x = 0,$$

где $\vec{U}(x, y, z, t)$ — вектор смещений куба, на боковых гранях $y = \pm 0,5$ и $z = \pm 0,5$ вектор поверхностных нагрузок равен нулю, а на верхней грани имеет составляющие

$$\vec{P}(x, y, z, t) = \{-1000 \delta(y, z) f(t); 0; 0\} \quad \text{при } x = 1, y = 0, z = 0,$$

где $\delta(y, z)$ — дельта-функция Дирака; $f(t)$ — закон изменения нагрузки во времени (рис. 1).

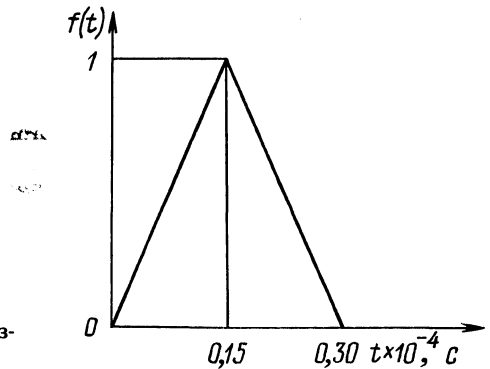


Рис. 1. Закон изменения нагрузки.

Схема решения задачи заключалась в следующем. Определялись собственные частоты и собственные формы колебаний куба. При этом полагалось:

$$\vec{P}(x, y, z, t) \equiv 0;$$

$$\vec{U}(x, y, z, t) = \vec{U}_j(x, y, z) \sin \omega_j t; \quad (1)$$

$$\vec{U}_j(x, y, z) = \sum_{i=1}^N a_i \vec{\varphi}_i(x, y, z), \quad j = 1, 2 \dots k, \quad (2)$$

где $\vec{U}_j(x, y, z)$ — собственные формы колебаний куба; ω_j — собственные частоты колебаний куба; a_j — неопределенные коэффициенты; $\vec{\varphi}_i(x, y, z)$ — векторные координатные функции.

С использованием выражений (1) и (2) краевая задача о собственных колебаниях куба с помощью вариационного уравнения Лагранжа [3] сводилась к системе линейных алгебраических уравнений, из которой методом последовательных приближений определялись ω_j и $\vec{U}_j(x, y, z)$.

Вектор смещений образца представлялся в виде ряда по собственным формам колебаний

$$\vec{U}(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^K b_i(t) \vec{U}_i(x, y, z) \quad (3)$$

где $b_j(t)$ — функции времени.

С помощью разложения (3) и вариационного уравнения Лагранжа динамическая задача теории упругости сводилась к системе обыкновенных независимых дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций $b_j(t)$. Окончательное решение задачи выражалось через интеграл Дюамеля в виде

$$\vec{U}(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^K \left\{ g_j \cos \omega_j t + \frac{h_j}{\omega_j} \sin \omega_j t + \frac{1}{\omega_j} \int_0^t \sin \omega_j(t-\tau) \frac{(\vec{P}(\tau), \vec{U}_j)_{S_2}}{(\rho \vec{U}_j, \vec{U}_j)_V} d\tau \right\} \vec{U}_j(x, y, z), \quad (4)$$

где g_j и h_j — константы, определяемые из начальных условий; V — область, занимаемая телом; S_2 — часть поверхности, на которой заданы динамические граничные условия; ρ — плотность материала.

Приведенная схема решения задачи была реализована на ЭВМ ЕС-1022 при следующих исходных данных: $k = 3$; $\rho = 7850$; модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

Аппроксимация вектора смещений куба на j -ой форме колебаний имела следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} u(j) &= \sum_{m=0}^5 \sum_{n=0}^5 \sum_{p=0}^5 a_{m+1, 2n, 2p}^{(j)} x^{m+1} y^{2n} z^{2p}; \\ v(j) &= \sum_{m=0}^5 \sum_{n=0}^5 \sum_{p=0}^5 a_{m+1, 2n+1, 2p}^{(j)} x^{m+1} y^{2n+1} z^{2p}; \\ w(j) &= \sum_{m=0}^5 \sum_{n=0}^5 \sum_{p=0}^5 a_{m+1, 2n, 2p+1}^{(j)} x^{m+1} y^{2n} z^{2p+1}; \end{aligned} \right\}$$

$$\forall x^1 y^k z^t \quad 1 + k + t \leq 5.$$

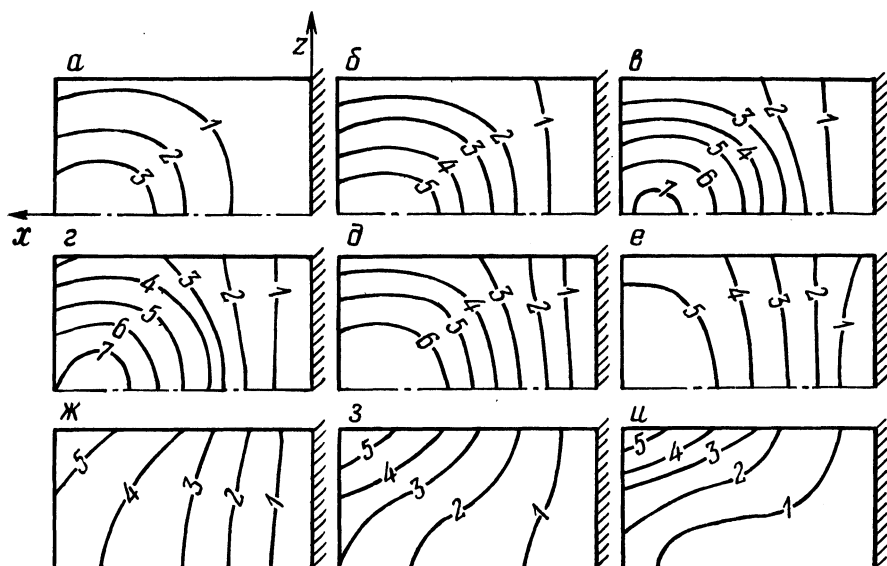


Рис. 2. Поле перемещений образца: а, б, в, г, д, е, ж, з, и — распределение перемещений u при $t = 0,58 \cdot 10^{-4}$; $0,88 \cdot 10^{-4}$; $1,18 \cdot 10^{-4}$; $1,48 \cdot 10^{-4}$; $1,78 \cdot 10^{-4}$; $2,08 \cdot 10^{-4}$; $2,38 \cdot 10^{-4}$; $2,68 \cdot 10^{-4}$; $2,98 \cdot 10^{-4}$ с; 1-7 — линии уровней смещений $u = -0,1 \cdot 10^{-9}$; $-0,2 \cdot 10^{-9}$; $-0,3 \cdot 10^{-9}$; $-0,4 \cdot 10^{-9}$; $-0,5 \cdot 10^{-9}$; $-0,6 \cdot 10^{-9}$; $-0,7 \cdot 10^{-9}$.

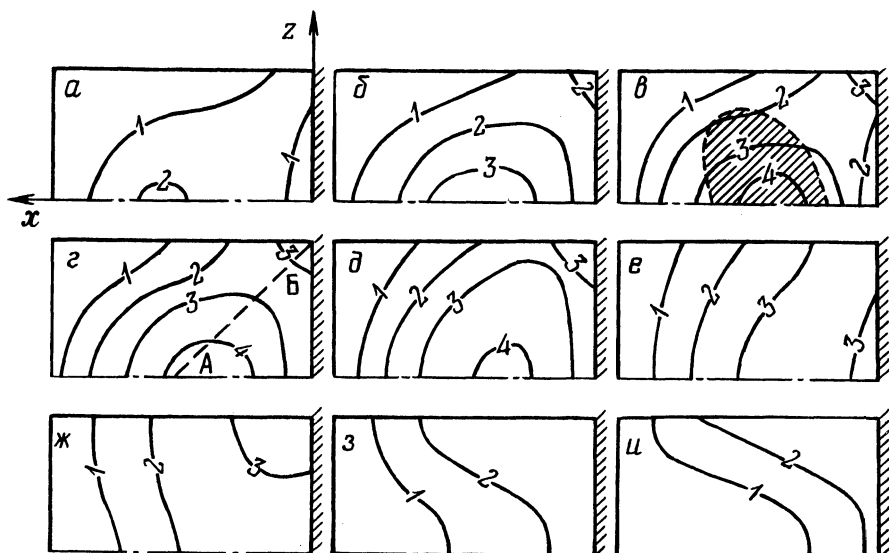


Рис. 3. Поле напряжений образца: а, б, в, г, д, е, ж, з, и — распределение напряжений σ_x при $t = 0,58 \cdot 10^{-4}$; $0,88 \cdot 10^{-4}$; $1,18 \cdot 10^{-4}$; $1,48 \cdot 10^{-4}$; $1,78 \cdot 10^{-4}$; $2,08 \cdot 10^{-4}$; $2,38 \cdot 10^{-4}$; $2,68 \cdot 10^{-4}$; $2,98 \cdot 10^{-4}$ с; 1-4 — линии уровней напряжений $\sigma_x = 50$; 100; 150; 200.

Интегрирование по времени в выражении (4) проводилось численно, по методу Симпсона с шагом $\Delta t = 1 \cdot 10^{-6}$ с.

На рис. 2, 3 представлены результаты расчетов полей перемещений u и напряжений σ_x , возникающих в образце в различные моменты времени (показана 1/2 сечения образца плоскостью XOZ).

Анализ графиков рис. 2 показывает, что фронт волны перемещений в образце существенно неплоский и первоначально близок к сферическому. В первые моменты времени после прекращения действия силы область максимальных перемещений находится на расстоянии 0,14—0,16l от поверхности образца (здесь l — длина ребра куба, рис. 3, б, в, г). В последующие моменты времени волна перемещений отражается от закрепленной грани (рис. 3, ж, з). При этом наиболее интенсивное отражение наблюдается в средней части образца (рис. 3, и). Траектории движения точек куба в плоскости XOZ представляют собой эллипсы, большие оси которых почти параллельны оси OX .

Сопоставим результаты расчета напряжений в образце с результатами экспериментальных исследований разрушений призматических образцов при взрыве точечного заряда на одной из граней образца [2].

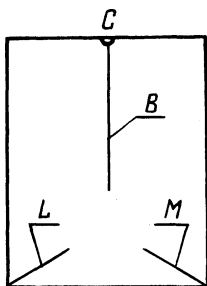


Рис. 4. Области разрушения образца (опыты Г.Кольского).

На рис. 4. показаны полученные экспериментально характерные области разрушения, образующиеся в образце при взрыве заряда в точке C [2]. Основные разрушения следующие:

узкая область разрушения, развивающаяся по оси B образца. Интенсивность разрушения не уменьшается монотонно вдоль линии B , а проходит через максимум и затем быстро убывает;

разрушения, развивающиеся по плоскостям L и M . Тангенс угла, образуемого плоскостью разрушения с основанием образца, равен отношению ширины основания к высоте образца.

Анализ расчетных графиков напряжений рис. 3 показывает, что до отражения импульса от закрепленной грани максимальные напряжения сжатия σ_x возникают на оси OX . В центральной части образца (на рис. 3, в заштриховано) указанные напряжения сопровождаются максимальными напряжениями растяжения σ_y и σ_z . При этом на оси OX $\sigma_y = \sigma_z$, $|\max \sigma_z| \approx 0,25 |\max \sigma_x|$.

Таким образом, наблюдаемые в эксперименте особенности разрушения образца по линии В объясняются значительной неравномерностью распределения напряжений по оси ОХ, а также неблагоприятным сочетанием максимальных сжимающих и растягивающих напряжений в средней части образца.

В начальный период времени имеет место лишь количественный рост напряжений в образце, положение зоны максимальных напряжений изменяется незначительно (рис. 3,б,в,г,д). При этом вторая по уровню область максимальной интенсивности напряжений непосредственно примыкает к ребру $x = 0,0$; $z = 0,5$, а наиболее быстрый рост всех компонентов напряжений наблюдается на плоскости, проходящей через центр образца и ребро. На рис. 3,г проекция этой плоскости на плоскость ХОZ показана прерывистой линией АБ.

Таким образом, расчетные плоскости разрушения образуют угол 45° с основанием образца, что хорошо согласуется с данными опытов [2].

Следует отметить, что в течение всего рассматриваемого промежутка времени расчетные значения тех компонентов напряжений, которые на поверхности образца должны равняться нулю, имели величину на 1—2 порядка меньше максимальной величины напряжений. Это свидетельствует об удовлетворительном выполнении динамических граничных условий задачи, а также о достаточной степени достоверности предварительно найденных форм собственных колебаний образца.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ионов В.Н., Огибалов П.М. Напряжения в телах при импульсивном нагружении. — М.: Высшая школа, 1975. — 463 с.
2. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах. — М.: Изд. иностр. лит., 1955. — 192 с.
3. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. — Минск: Наука и техника, 1967. — 228 с.

УДК 621.791.541.65

Г.Ф.ЕРШОВ, докт.техн.наук (БПИ),
Э.Г.КОСЫХ, канд.техн.наук (ГПИ)

РАСЧЕТ ПОЛИГОНАЛЬНЫХ В ПЛАНЕ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Решая задачу изгиба пологой сферической оболочки сосредоточенной силой P в произвольной точке (r_0, θ_0) для разрешающей комплексной функции, уравнение примет вид [1]

$$\Delta\Delta\tilde{F} - i\Delta\tilde{F} = \frac{P}{r_0} \delta_{2\pi}(r-r_0, \theta-\theta_0),$$