

М.Д.МАРТЫНЕНКО, докт. физ.-мат.наук,
ФАМ ДЫК ТИнь, студент (БГУ)

РАСЧЕТ НЕКОТОРЫХ СОЧЛЕНЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ПРИБОРОВ ИЭТ НА ВИБРАЦИОННУЮ НАГРУЗКУ

Задачи целенаправленного конструирования приборов измерительно-электронной техники (ИЭТ) требуют расчета всех их элементов на вибрационную нагрузку и, в частности, определения частот их собственных колебаний. В настоящей статье рассматриваются элементы, выполненные в виде круглых пластин, сочлененных со стержнем переменной толщины. Считается, что сочленение пластинки со стержнем имеет точечный характер в силу малости площадки контакта, а колебания такой системы инициируются источником, действующим на свободном конце стержня и вызывающим только продольные смещения его точек. Методом малого параметра получено трехчленное выражение для основного тона колебаний рассматриваемой системы.

Уравнения осесимметричных изгибных колебаний круглой пластины радиуса a постоянной толщины h и продольных колебаний стержня переменной жесткости, составляющих рассматриваемый элемент, в безразмерных координатах $r = \frac{x}{a}$, $z = \frac{y}{a}$ сводятся к интегрированию следующей системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений [1]:

$$-\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^2 \tilde{w} + k^4 \tilde{w} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{d}{dz} [\tilde{S}(z) \frac{d\tilde{u}}{dz}] + k^4 p \tilde{S}(z) \tilde{u} = 0, \quad (2)$$

$$\text{где } \tilde{w} = \frac{w}{a}; \tilde{u} = \frac{u}{a}; k^4 = \frac{12(1-\nu_0^2) \rho_0 a^4}{E_0 h^2} \omega^2; p = \frac{E_0 \rho \left(\frac{h}{a}\right)^2}{12(1-\nu_0^2) E \rho_0};$$

$$\tilde{S}(z) = \frac{12(1-\nu_0^2) a E(z)}{E_0 h^3} S(z); L_I = \frac{l_I}{a}; L_{II} = \frac{l_{II}}{a},$$

причем $w = w\left(\frac{x}{a}\right)$ — нормальные перемещения точек срединной плоскости пластинки; $u = u\left(\frac{y}{a}\right)$ — продольные перемещения осевых точек стержня; $S = S\left(\frac{y}{a}\right)$ — площадь поперечного сечения

стержня; $E = E(\frac{y}{a})$; $\rho = \rho(\frac{y}{a})$ — модуль Юнга и плотность стержня; E_0, ρ_0, ν_0 — модуль Юнга, плотность и коэффициент Пуассона пластины (постоянные величины); $0 \leq x \leq a (0 \leq r \leq 1)$; $l_1 \leq y \leq l_{II} (L_I \leq z \leq L_{II})$.

Для определения частоты собственных колебаний ω или, что то же самое, величины k к (1) — (2) добавим такие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} -\tilde{w}'''(1) - \tilde{w}''(1) + \tilde{w}'(1) &= 0; \\ -\tilde{w}''(1) - \nu_0 \tilde{w}'(1) &= 0; \\ \tilde{w}'(0) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{w}(0) &= -\tilde{u}(L_{II}); \\ [2\pi r(-\tilde{w}''' - \frac{1}{r}\tilde{w}'' + \frac{1}{r^2}\tilde{w}')]|_{r=0} &= -\tilde{S}(L_{II})\frac{d\tilde{u}}{dz}|_{z=L_{II}}; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}(L_I) &= 0; \\ \tilde{S}(z_K-0)\tilde{u}'(z_K-0) &= \tilde{S}(z_K+0)\tilde{u}'(z_K+0); \\ \tilde{u}(z_K-0) &= \tilde{u}(z_K+0). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Формулы (3) означают, что контур пластинки свободен, угол поворота нормали к срединной плоскости пластины в ее центре равняется нулю; формулы (4) представляют условия точечного контакта центра пластины со стержнем (равенство перемещений и их сил); условия (5) представляют отсутствие перемещений свободного торца стержня и равенство сил и перемещений в точках z_K разрыва непрерывности функции жесткости $\tilde{S}(z)$.

Общее решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (3), выражается через функции Бесселя следующим образом:

$$\tilde{w} = C_3 \left\{ C_1 J_0(kr) + C_2 I_0(kr) + Y_0(kr) + \frac{2}{\pi} K_0(kr) \right\},$$

где

$$C_1 = \frac{\frac{2(1-\nu_0)}{k} Y_1(k) \cdot I_1(k) + \frac{2}{\pi} [K_1(k) \cdot I_0(k) + K_0(k) \cdot I_1(k)] -}{-Y_1(k) I_0(k) - Y_0(k) I_1(k)} \frac{2(1-\nu_0)}{k} J_1(k) \cdot I_1(k) + J_0(k) \cdot I_1(k) - \frac{2(1-\nu_0)}{k} J_1(k) \cdot I_1(k)}$$

$$C_2 = \frac{-\frac{4(1-\nu_0)}{\pi k} J_1(k) \cdot K_1(k) + \frac{2}{\pi} [K_1(k) \cdot J_0(k) - K_0(k) \cdot J_1(k)] + Y_0(k) J_1(k) - Y_1(k) J_0(k)}{J_1(k) \cdot I_0(k) + J_0(k) \cdot I_1(k) - \frac{2(1-\nu_0)}{k} J_1(k) \cdot I_1(k)},$$

где C_3 — произвольная постоянная.

Если функция $\tilde{S}(z)$ на каждом участке непрерывности постоянна или меняется по экспоненциальному закону, то решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям (5), может быть записано в виде

$$\tilde{u}(z) = C_4 g(z, k),$$

где $g(z, k)$ — известная функция; C_4 — произвольная постоянная.

Из условий сопряжения (4) имеем

$$C_3 = -C_4 \left. \frac{\tilde{S}(L_{II})}{8k^2} \frac{dg(z, k)}{dz} \right|_{z=L_{II}}$$

и уравнение частот

$$F(k) = \frac{8k^2}{\tilde{S}(L_{II})} \cdot \frac{g(L_{II}, k)}{dg(L_{II}, k)}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{где } F(k) = & \left\{ \frac{2(1-\nu_0)}{k} [Y_1(k) \cdot I_1(k) - \frac{2}{\pi} K_1(k) \cdot J_1(k)] + [I_0(k) + J_0(k)] \right. \\ & \times \left[\frac{2}{\pi} K_1(k) \cdot Y_1(k) + [I_1(k) - J_1(k)] \cdot \left[\frac{2}{\pi} K_0(k) - Y_0(k) \right] \right\} \left\{ J_1(k) I_0(k) + \right. \\ & \left. + J_0(k) \cdot I_1(k) - \frac{2(1-\nu_0)}{k} J_1(k) \cdot I_1(k) \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Формула (6) теоретически решает задачу нахождения частоты колебаний рассматриваемой упругой системы, ее использование на практике связано с построением соответствующего численного алгоритма. Применим к решению уравнения (6) метод малого параметра.

Будем искать решение (6), предполагая, что оно близко расположено к основному тону изгибных колебаний круглых пластин, защемленных в центре. Обозначим через k^* искомое решение уравнения (6) и предположим, что $|k^* - k_0| = |\Delta k| \ll 1$, где $k_0 = 1,94$ — основной тон изгибных колебаний защемленной в центре круглой пластинки [1—2]. Из предыдущего следует, что $F(k_0) = 0$.

Предположим также, что

$$k^4_p = \frac{\left(\frac{h}{a}\right)^2 E_0 \rho \left(\frac{y}{a}\right) k^4}{E\left(\frac{y}{a}\right) \cdot \rho_0 \cdot 12(1-\nu_0^2)} = 0\left(\left(\frac{h}{a}\right)^2\right) \text{ при } |k^* - k_0| \ll 1.$$

Тогда инерционным членом в уравнении (2) можно пренебречь и его решение представимо в виде

$$\tilde{u}(z) = C_4 \int_{L_I}^{L_{II}} \frac{dz}{S(z)} \left[1 + 0\left(\left(\frac{h}{a}\right)^2\right) \right]. \quad (8)$$

Иными словами, при сделанных предположениях имеем следующее приближенное выражение для $g(z, k)$:

$$g(z, k) = \int_{L_I}^{L_{II}} \frac{dz}{S(z)} \left[1 + 0\left(\left(\frac{h}{a}\right)^2\right) \right].$$

Поэтому уравнение (6) приводится к следующему виду:

$$F(k) = 8k^2 \int_{L_I}^{L_{II}} \frac{dz}{S(z)} \left[1 + 0\left(\left(\frac{h}{a}\right)^2\right) \right], \quad (9)$$

или, в силу сделанных в начале статьи обозначений

$$F(k) = \frac{h}{a} \cdot \frac{2k^2 E_0 h^2}{3(1-\nu_0^2)} \int_{L_I}^{L_{II}} \frac{dz}{E(z)S(z)} \left[1 + 0\left(\left(\frac{h}{a}\right)^2\right) \right]. \quad (10)$$

Подставим в это уравнение $k^* = k_0 + \Delta k$ и разложим правую часть в ряд Тейлора в окрестности $k_0 = 1,94$. Удерживая в этом разложении только члены первого и второго порядков по отношению к Δk и отбрасывая члены с Δk в старших степенях, получим для Δk следующее квадратное уравнение (напомним, что $F(k_0) = 0$):

$$\left[\frac{1}{2} F''(k_0) - \frac{h}{a} A \right] (\Delta k)^2 + \left[F'(k_0) - 2 \frac{h}{a} A \right] \Delta k - \frac{h}{a} A k_0^2 = 0, \quad (11)$$

где

$$A = \frac{2E_0 h^2}{3(1-\nu_0^2)} \int_{L_I}^{L_{II}} \frac{dz}{E(z)S(z)}.$$

Точное решение уравнения (11) дается формулами Виета. Однако при его выводе был сделан ряд предположений и потому точные

формулы могут быть непригодны на практике. В частности, решение уравнения (11) должно удовлетворять условию $|\Delta k| \ll 1$. Поэтому, разыскивая его в виде $\Delta k = a + \beta \frac{h}{a} + \gamma \left(\frac{h}{a}\right)^2 + 0\left(\left(\frac{h}{a}\right)^2\right)$, получим

$$\Delta k = \frac{Ak_0^2}{F'(k_0)} \frac{h}{a} - \frac{A^2 k_0^2 [k_0^2 F''(k_0) - 4F'(k_0)]}{2 [F'(k_0)]^3} \left(\frac{h}{a}\right)^2 + 0\left(\left(\frac{h}{a}\right)^2\right).$$

В этом случае для k^* имеем следующее выражение:

$$k^* = k_0 + \frac{Ak_0^2}{F'(k_0)} \cdot \frac{h}{a} - \frac{A^2 k_0^2 [k_0^2 F''(k_0) - 4F'(k_0)]}{2 [F'(k_0)]^3} \left(\frac{h}{a}\right)^2 + 0\left(\left(\frac{h}{a}\right)^2\right).$$

Так как $k_0 = 1,94$; $F'(k_0) \approx -1,63$; $F''(k_0) \approx -2$, то

$$k^* = 1,94 - \frac{h}{a} \cdot 1,54 \frac{E_0 h^2}{1-\nu_0^2} \cdot \int_{L_I}^{L_{II}} \frac{dz}{E(z) S(z)} - \left(\frac{h}{a}\right)^2 \cdot 0,19 \left[\frac{E_0 h^2}{1-\nu_0^2} \cdot \int_{L_I}^{L_{II}} \frac{dz}{E(z) \cdot S(z)} \right]^2 + 0\left(\left(\frac{h}{a}\right)^2\right).$$

Полученная формула показывает, что основной тон системы "пластинка—стержень" понижен по сравнению с основным тоном пластинки, защемленной в центре. Эта формула может быть использована для решения прямой и обратной задач теории колебаний применительно к рассматриваемой упругой системе — определение частоты основного тона системы по ее геометрическим и механическим параметрам и параметров системы по заданной частоте ее основного тона.

Приведенные в данной статье формулы были представлены на IX Международной конференции по нелинейным колебаниям [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. — М.: Машиностроение, 1970. — 256 с. 2. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластин и оболочек. — Киев: Наукова думка, 1964, с. 29; 52—54. 3. Мартыненко М.Д., Фамдык Тинь. Колебания некоторых концентраторов напряжений: Тез. докл. IX Международной конф. по нелинейным колебаниям. Киев, 1981, с. 213.