

жет быть выполнено нахождением характерной средней скорости сдвига в канале шнека и сопоставлением ее со средней скоростью сдвига в зазоре ротационного пластометра, определением соответствующей этому условию эквивалентной частоты вращения ротора пластометра  $n_{\text{ЭКВ}}$  и подстановкой этой  $n_{\text{ЭКВ}}$  наряду с заданной температурой процесса  $T$  для расчета времени пластикации  $t_{\text{П}}$  по полученным интерполяционным формулам (1), (2).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Белкин И.М., Виноградов Г.В., Леонов А.И. Ротационные приборы. Измерение вязкости и физико-механических характеристик материалов /Под ред. Г.В.Виноградова. — М.: Машиностроение, 1968. — 272 с. 2. Н а л и м о в В.В., Ч е р н о в а Н.А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. — М.: Наука, 1965. — 340 с.

УДК 531.312

Ю.А.КИМ, мл.науч.сотр. (БПИ)

### ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ БЕСКОНЕЧНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ ЗАДАННОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДЕФОРМАЦИИ НА ПОВЕРХНОСТИ

При решении ряда практических задач расчета оснований строительных конструкций, взаимодействия движителей самоходных машин с грунтом и других возникает необходимость исследования распределения напряжений и деформаций в грунте.

При небольших деформациях грунт с достаточной точностью можно рассматривать как линейно-деформируемое тело и для его расчета применять классическую теорию упругости.

Как показывают опыты [1—3], график зависимости давления  $P$  от деформации  $h$  представляет собой некоторую кривую  $P = f(h)$  причем

$$\frac{d^2P}{dh^2} < 0.$$

Обозначим через  $H$  — глубину распространения конечных деформаций в грунте при данной нагрузке  $P$ .

Тогда

$$P = E \frac{h}{H} = f(h)$$

и

$$E = \frac{Hf(h)}{h}.$$

Отсюда видно, что прямолинейная зависимость  $P$  от  $h$  еще не означает, что модуль  $E$  постоянный и грунт является линейно-деформируемым телом. Большинство авторов приводят данные, согласно которым график  $P = f(h)$  представляет собой монотонную кривую, у которой  $\frac{dP}{dh} > 0$  и  $\frac{d^2P}{dh^2} < 0$ . Для такой кривой величина  $\frac{f(h)}{h}$  уменьшается с увеличением  $h$ . Предположительно можно считать, что с увеличением нагрузки глубина зоны распространения конечной деформации  $H$  увеличивается. Вне этой зоны деформации очень малы и обнаружить их опытным путем достаточно сложно.

Тенденции изменения  $\frac{f(h)}{h}$  и  $H$  противоположны и, вследствие этого, модуль  $E$  может быть постоянным или незначительно меняться с увеличением  $h$ .

Допустим, что на поверхности полупространства, в области, ограниченной двумя кривыми  $ADC$   $x = \varphi_1(y)$  и  $ABC$   $x = \varphi_2(y)$  (рис. 1),

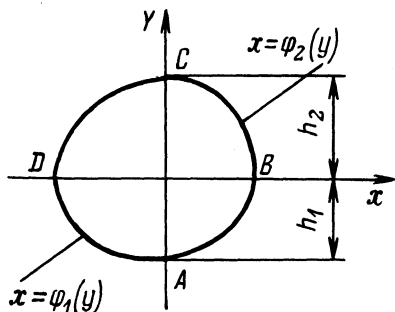


Рис. 1. Отпечаток колеса на поверхности грунта (вид в плане).

задано вертикальное перемещение грунта  $U_z = f(x, y)$ . Перемещения по осям координат  $U_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$  должны удовлетворять уравнениям Ляме:

$$\nabla u_x + (\kappa + 1) \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0;$$

$$\nabla u_y + (\kappa + 1) \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0;$$

$$\nabla u_z + (\kappa + 1) \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0;$$

$$\kappa = \frac{\lambda}{\mu}; \quad \lambda = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)};$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)},$$

где  $\sigma$  — коэффициент Пуассона;  $\nabla$  — оператор Лапласа.

Общее решение уравнений Ляме представляется в виде

$$u_x = \varphi_1 + z \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (1)$$

$$u_y = \varphi_2 + z \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad (2)$$

$$u_z = \varphi_3 + z \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (3)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2$  и  $\varphi_3$  — произвольные гармонические функции, а  $\psi$  определяется из уравнения

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = - \frac{(k+1)}{(k+3)} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right). \quad (4)$$

Из уравнений (1) — (4) видно, что  $\varphi_1(x, y, 0)$ ,  $\varphi_2(x, y, 0)$  и  $\varphi_3(x, y, 0)$  представляют собой перемещения на поверхности грунта ( $z=0$ ), которые при решении конкретных задач должны быть заданы.

В данном случае

$$\varphi_3(x, y, 0) = f(x, y), \quad (5)$$

а функции  $\varphi_3(x, y, z)$  и  $\varphi_2(x, y, z)$  положим равными нулю. Тогда рассматриваемая задача сводится к определению гармонической функции  $\varphi(x, y, z)$ , удовлетворяющей граничному условию (5). Применяя двойное интегральное преобразование Фурье к функции  $f(x, y)$ , нетрудно убедиться, что условию (5) удовлетворяет гармоническая функция  $\varphi_3(x, y, z)$ , представленная в виде

$$\begin{aligned} \varphi_3(x, y, z) = & \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \{ \int_0^{\infty} [a(u, v) \cos(vy) + b(u, v) \sin(vy)] dv \cdot \exp(-\sqrt{u^2 + v^2} \cdot z) \cdot \\ & x \cos ux + \int_0^{\infty} [a(u, w) \cos(wy) + \beta(u, w) \sin(wy)] dw \cdot \exp(-\sqrt{u^2 + w^2} \cdot z) \cdot \\ & x \sin ux \} du, \end{aligned}$$

$$\text{где } a(u, v) = \frac{1}{\pi^2} \frac{h_2 \varphi_2(y)}{-h_1 \varphi_1(y)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x, y) \cos(ux) dx \cos(vy) dy;$$

$$b(u, v) = \frac{1}{\pi^2} \frac{h_2 \varphi_2(y)}{-h_1 \varphi_1(y)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x, y) \cos(ux) dx \sin(vy) dy;$$

$$\alpha(u, w) = \frac{1}{\pi^2} \frac{h_2 \varphi_2(y)}{-h_1 \varphi_1(y)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x, y) \sin(ux) dx \cos(wy) dy;$$

$$\beta(u, w) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-h_1}^{h_2} \varphi_2(y) \int_{\varphi_1(y)} f(x, y) \sin(ux) dx \sin(wy) dy.$$

Функция  $f(x, y)$  интегрируема по  $x$  и  $y$  в заданной области, поэтому, согласно теореме Римана-Лебега, при  $u \rightarrow \infty$ ,  $v \rightarrow \infty$ ,  $w \rightarrow \infty$  коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  равны 0. Также при  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow \infty$  и  $z \rightarrow \infty$   $\varphi_3(x, y, z) = 0$ . Следовательно, перемещения  $u_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$  в точках, бесконечно удаленных от места приложения внешней нагрузки, равны 0.

Найденная функция  $\varphi_3(x, y, z)$  позволяет определить нагрузку  $P_{zz}(x, y, 0)$  на поверхности, под действием которой реализуется заданное перемещение  $u_z(x, y, 0) = f(x, y)$ . Найдем сначала функцию  $u_z(x, y, z)$

$$u_z(x, y, z) = \varphi_3(x, y, z) - \left( \frac{\kappa + 1}{\kappa + 3} \right) z \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}.$$

Отсюда

$$\left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)_{z=0} = \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right)_{z=0} \frac{2}{(\kappa + 3)}$$

и давление на поверхности

$$P_{zz}(x, y, 0) = \frac{2E}{(\kappa + 3)} \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right)_{z=0}.$$

Полученный результат позволяет определить суммарную нагрузку, передаваемую на движитель самоходной машины, или общую нагрузку на грунт строительной конструкции, и предложенная методика дает возможность также исследовать распределение напряжений и деформации в том случае, когда на поверхности задана не деформация, а нагрузка.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г у с ь к о в В.В. Тракторы, ч. II. Теория. — Минск: Вышэйшая школа, 1977, с. 13—15.
2. С к о й б е д а А.Т. Автоматизация ходовых систем колесных машин. — Минск: Наука и техника, 1979, с. 17—19.
3. А г е й к и н Я.С. Вездеходные колесные и комбинированные движители. — М.: Машиностроение, 1972, с. 15—17.