

третьего столбца можно составить уравнения для определения углов ψ_s и θ_s , например:

$$\begin{aligned} a_{13}^{(4)} &= a_{11}^{(3)} \cdot \sin \theta_s - a_{12}^{(3)} \cdot \sin \psi_s \cdot \cos \theta_s + a_{13}^{(3)} \cdot \cos \psi_s \cdot \cos \theta_s; \\ a_{23}^{(4)} &= a_{21}^{(3)} \cdot \sin \theta_s - a_{22}^{(3)} \cdot \sin \psi_s \cdot \cos \theta_s + a_{23}^{(3)} \cdot \cos \psi_s \cdot \cos \theta_s, \end{aligned} \quad (12)$$

а на основании одного из элементов первого столбца — уравнение относительно φ_s :

$$\begin{aligned} a_{11}^{(4)} &= a_{11}^{(3)} \cdot \cos \theta_s \cdot \cos \varphi_s + a_{12}^{(3)} \cdot (\cos \psi_s \cdot \sin \varphi_s + \sin \psi_s \cdot \sin \theta_s \cdot \cos \varphi_s) + \\ &+ a_{13}^{(3)} \cdot (\sin \psi_s \cdot \sin \varphi_s - \cos \psi_s \cdot \sin \theta_s \cdot \cos \varphi_s). \end{aligned} \quad (13)$$

Изложенный метод позволяет осуществить единый подход к решению прямых и обратных задач кинематики манипуляторов. Для кинематических цепей с частным расположением осей кинематических осей кинематических пар, подобных рассмотренным выше, решение уравнений может быть получено в конечном виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Е.П., Верещагин А.Ф., Зенкевич С.Л. Манипуляционные роботы. — М.: Наука, 1978. — 240 с. 2. Пол Р. Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота-манипулятора. — М.: Наука, 1976, с. 50. 3. Коренев Г.В. Целенаправленная механика управляемых манипуляторов. — М.: Наука, 1979, с. 69.

УДК 621.01

В.К.АКУЛИЧ, канд.техн.наук,
Э.И.АСТАХОВ, доц. (БПИ)

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ И СИЛОВОЙ АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ

Для расчета ожидаемых вибраций в точках контакта человека с ручным инструментом, а также для выполнения динамического синтеза механизма привода из условия минимизации виброскоростей необходимо предварительно решить задачу кинематического и силового анализа механизма привода. Ранее в работах [1, 2] была показана методика аналитического метода анализа для плоского механизма привода. В данной работе дается методика кинематического и силового анализа пространственного рычажного механизма, применяемого в новых образцах ручных механизированных электропил.

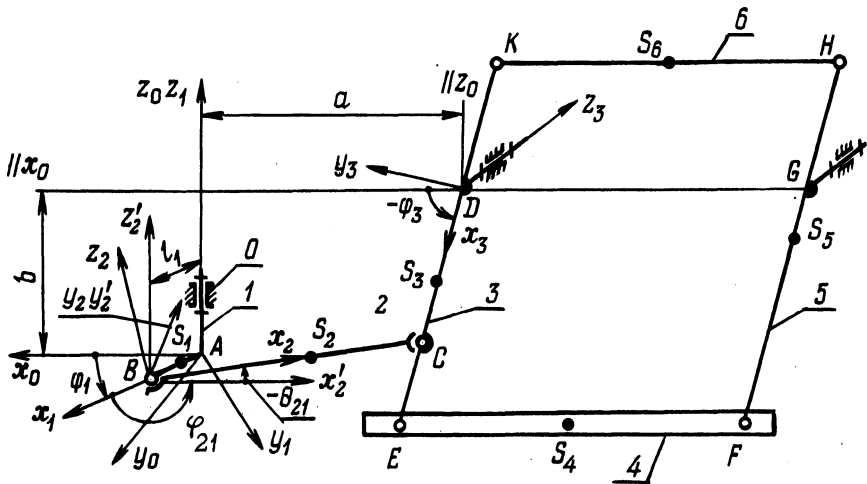


Рис. 1. Схема пространственного механизма привода и используемые системы координат.

Механизм (рис. 1) преобразует вращательное движение кривошипа 1 в горизонтальной плоскости $x_0 Ay_0$ посредством шатуна 2 в качательное движение коромысла 3 в вертикальной плоскости $z_0 Ax_0$. Коромысло 3, рабочий орган 4, коромысло 5 и тяга 6 образуют шарнирный параллелограмм, плоскость движений которого проходит через ось z_1 кривошипа 1. Кинематический анализ механизма проводится методом преобразования координат с применением аппарата матриц [3]. Используемые системы координат и параметры относительного движения звеньев показаны на рис. 1. Так как звенья 3, 4, 5 и 6 образуют шарнирный параллелограмм, то звено 5 движется также, как и звено 3, а звенья 4 и 6 движутся в противофазе поступательно по дугам окружностей радиусов l_{DE} и l_{DK} . Таким образом, для кинематического анализа достаточно рассмотреть контур звеньев 1, 2, 3, 0. Матричное уравнение замкнутости этого контура

$$M_{01} M_{12} M_{22} r_C^{(2)} = M_{03} r_C^{(3)}, \quad (1)$$

где $M_{01}, M_{12}, M_{22}, M_{03}$ — матрицы перехода (четвертого порядка); $r_C^{(2)}$ и $r_C^{(3)}$ — столбцовые матрицы координат точки C в подвижных декартовых системах координат $D_2(x_2, y_2, z_2)$ и $D_3(x_3, y_3, z_3)$.

Например, матрица M_{01} перехода от подвижной системы координат $D_1(x_1, y_1, z_1)$ к неподвижной системе $D_0(x_0, y_0, z_0)$, а также матрицы $r_C^{(2)}$ и $r_C^{(3)}$ имеют вид:

$$M_{01} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad r_C^{(2)} = \begin{vmatrix} l_{BC} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}; \quad r_C^{(3)} = \begin{vmatrix} l_{CD} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

После перемножения матриц уравнение (1) дает систему уравнений с тремя неизвестными θ_{21} , φ_3 и $\varphi_2 = \varphi_{21} + \varphi_1$, причем φ_1 — обобщенная координата механизма:

$$\left. \begin{aligned} l_{AB} \cos \varphi_1 + l_{BC} \cos \theta_{21} \cos \varphi_2 &= l_{CD} \cos \varphi_3 - a; \\ l_{AB} \sin \varphi_1 + l_{BC} \cos \theta_{21} \sin \varphi_2 &= 0; \\ -l_{BC} \sin \theta_{21} &= l_{CD} \sin \varphi_3 + b. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Для определения скоростей и ускорений дифференцируем по времени уравнения (2), в результате чего получаем систему уравнений, линейных относительно $\dot{\theta}_{21}$, $\dot{\varphi}_3$, $\dot{\varphi}_2$. Кососимметричная матрица $\Omega_2^{(2)}$ угловой скорости $\omega_2^{(2)}$ звена 2 в системе D_2 (относительно стойки 0) определяется следующим образом [4]:

$$\Omega_2^{(2)} = T_{20} \dot{T}_{02}, \quad (3)$$

где T_{20} , T_{02} — матрицы поворота (третьего порядка), получаемые из матриц M_{20} и M_{02} исключением четвертой строки и четвертого столбца.

Матрица $\Omega_2^{(2)}$ имеет следующий вид:

$$\Omega_2^{(2)} = \begin{vmatrix} 0 & z_2 & y_2 \\ 0 & -\omega_2 & \omega_2 \\ \omega_2 & 0 & -\omega_2 \\ -\omega_2 & \omega_2 & 0 \end{vmatrix} \quad (4)$$

На основании выражения (4) получаются столбцовые матрицы $\omega_2^{(2)}$ и $\omega_2^{(0)} = T_{02} \omega_2^{(2)}$. Аналогичным образом находятся матрицы угловой скорости звена 3 — $\omega_3^{(3)}$ и $\omega_3^{(0)}$.

Для определения ускорений дважды дифференцируем по времени уравнения (2), в результате чего получаем систему уравнений, линейных относительно $\ddot{\theta}_{21}$, $\ddot{\varphi}_3$, $\ddot{\varphi}_2$. Матрицы углового ускорения звеньев 2 и 3 находим путем дифференцирования соответствующих матриц угловой скорости.

Выражения для координат центров масс звеньев S_1, S_2, \dots, S_6 получаем путем перехода к неподвижной системе. Дифференцируя полученные выражения, находим проекции скоростей и ускорений центров масс звеньев.

Силовой анализ исследуемого механизма заключается в определении главного вектора $\bar{F}_И$ и главного момента $\bar{M}_И$ сил инерции, а также реакций во всех кинематических парах. Для статической определимости задачи масса пилы m_4 разнесена статически по двум точкам E и F. Неизвестными являются следующие реактивные силы и моменты: R_{63} (в паре K), R_{65} (в паре H), R_{50} (в паре G), M_{30}, R_{30} (в паре D), R_{32} (в паре C), M_{12}, R_{12} (в паре B), M_{10}, R_{10} (в паре A), а также необходимый уравновешивающий (движущий) момент $M_{ур}$ на кривошипе 1 (в указанных обозначениях первая цифра указывает, к какому звену приложена данная нагрузка, а вторая цифра — со стороны какого звена).

Силовой анализ выполняем аналитическим методом, используя матричное представление операций векторной алгебры [5], что позволяет формализовать процедуру составления уравнений равновесия звеньев в неподвижной пространственной системе координат. Для определения $\bar{F}_И$ и $\bar{M}_И$ вначале определялись их проекции на координатные оси X_0, Y_0, Z_0 . В частности, проекции момента $M_{и2}$ сил инерции звена 2, совершающего пространственное движение (в проекциях на оси подвижной системы координат D_2), вычислялись на основании [3], а для перехода к проекциям в неподвижной системе координат использовалось матричное уравнение

$$M_{и2}^{(0)} = T_{02} M_{и2}^{(2)}.$$

При определении реакций последовательно рассматриваем статически определимые системы звеньев 5 и 6, 2 и 3 и кривошип 1, нагруженные силами инерции $F_{иi}$, силами тяжести звеньев G_i и реактивными силами и моментами. В частности, уравнения равновесия системы звеньев 2 и 3 имеют следующий вид (в матричной форме):

$$\left. \begin{aligned} R_{21} + F_{и2} + G_2 + F_{и3} + G_E + R_{30} - R_{63} + G_3 + F_{иE} &= 0; \\ R_{21} + F_{и2} + G_2 + R_{23} &= 0; \\ M_{21} + L_{CB} R_{21} + L_{CS_2} (F_{и2} + G_2) + M_{и2} &= 0; \\ M_{30} + L_{CD} R_{30} + L_{CS_3} (F_{и3} + G_3) + M_{и3} + L_{CE} (F_{иE} + G_E) - L_{CK} R_{63} &= 0 \end{aligned} \right\} (5)$$

где L_{CB}, L_{CS_2} и т.д. — кососимметричные матрицы соответствующих радиус-векторов l_{CB}, l_{CS_2} и т.д., составляемые по аналогии

с матрицей (4). Например,

$$L_{CB} = \begin{vmatrix} 0 & -l_{BC} \sin \theta_{21} & -l_{BC} \cos \theta_{21} \sin \varphi_2 \\ l_{BC} \sin \theta_{21} & 0 & l_{BC} \cos \theta_{21} \cos \varphi_2 \\ l_{BC} \cos \theta_{21} \sin \varphi_2 & -l_{BC} \cos \theta_{21} \cos \varphi_2 & 0 \end{vmatrix}$$

После выполнения операций сложения и умножения матриц система четырех матричных уравнений (5) дает 12 линейных алгебраических уравнений с 12 неизвестными. Решение этой системы осуществлялось по стандартной программе на ЭВМ. Для проверки правильности выполнения силового анализа используем следующие матричные уравнения, вытекающие из принципа Д'Аламбера в применении ко всему механизму:

$$\begin{aligned} R_{10} + R_{30} + R_{50} + \Sigma G_i + F_n &= 0; \\ M_{ур} + M_{10} + M_{30} + M_{и2} + M_{и3} + M_{и5} + L_{AS_1} G_1 + L_{AD} R_{30} + \\ + L_{AG} R_{50} + L_{AS_2} (F_{и2} + G_2) + L_{AS_3} (F_{и3} + G_3) + L_{AS_4} \times \\ \times (F_{и4} + G_4) + L_{AS_5} (F_{и5} + G_5) + L_{AS_6} (F_{и6} + G_6) &= 0. \end{aligned}$$

Кроме того, используем условие, что приведенный момент сил равен уравновешивающему моменту с противоположным знаком: $M_{пр} = -M_{ур}$, причем

$$M_{пр} = \frac{\Sigma P_i}{\omega_1},$$

где ΣP_i — сумма мощностей сил тяжести звеньев, сил инерции и моментов от сил инерции.

В соответствии с разработанным алгоритмом была составлена программа для вычислений на ЭВМ "Минск-22М". Расчет выполняется для угла поворота кривошипа φ_1 от 0 до 360° с шагом 15°.

ЛИТЕРАТУРА

1. Астахов Э.И., Кудин В.В. Оптимальный синтез направляющего механизма привода электропилы. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Вышэйшая школа, 1981, вып. 8, с. 86—90.
2. Камцев Е.А., Акулич В.К. Кинестатический силовой расчет четырехзвенного шарнирно-рычажного механизма аналитическим методом. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Вышэйшая школа, 1981, вып. 8, с. 90—96.
3. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин. — М.: Наука, 1979. — 576 с.
4. Лурье А.И. Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961. — 824 с.
5. Фрезер Р., Дункан В., Коллар А. Теория матриц и ее приложения. — М.: Изд-во иностр. лит., 1950. — 446 с.