в области разработки нефтяных месторождений и гидродинамика пласта. М., ВНИИ, 1973, вып. 47, с. 3—8. 6. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости/А.Бан, А.Ф.Богомолова, В.А.Максимов и др. — М.: Гостоптехиздат, 1962. — 286 с. 7. Ромм Е.С. Фильтрационные свойства трещиноватых горных пород. — М.: Недра, 1966. — 283 с. 8. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. — М.: Недра, 1972. — 288 с. 9. Оганджанянц В.Г., Маслянцев Ю.В. Исследование прямоточного капиллярного вытеснения нефти из пористых сред. — НТС ВНИИ, 1970, вып. 37, с. 15—22. 10. Везиров Д.Ш., Кочешков А.А. Экспериментальное исследование механизма нефтеотдачи трещиновато-пористых коллекторов при заводнении. — Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, № 6, с. 87—90.

УДК 532.135+539.3

Е.Н.ЛАМБИНА, канд.физ.-мат.наук,
Б.И.ЛАПУШИНА, канд.техн.наук (БПИ)

О ТЕЧЕНИИ ВЯЗКО-УПРУГОЙ СРЕДЫ НАСЛЕДСТВЕННОГО ТИПА МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ДИСКАМИ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Постановка задачи. В работе [1] рассматривалось течение, возникающее при сообщении одному из дисков, ограничивающему слой вязко-упругой среды, импульсного движения со скоростью v. В настоящей статье мы рассмотрим течение, возникающее при мгновенном приложении к одному из дисков постоянной силы F. При решении используем обозначения и метод работы [1]. Различие заключается в постановке граничных условий. Будем иметь

$$v_r\big|_{z=0} = 0;\quad v_r\big|_{z=b} = 0;\quad v_z\big|_{z=0} = 0; \tag{1}$$

$$2\pi\int_0^R rp\,dr = F;\quad p\big|_{r=R} = 0. \tag{2}$$

Граничные условия (2) учитывают приближенные соотношения

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0;\quad p_{zz} \approx -p;\quad p_{rr} \approx -p,$$

вытекающие из малой толщины слоя.

Решение для произвольных моделей. Так же, как в [1], положим

$$v_r = rf';\quad v_z = -2f. \tag{3}$$

Для изображений по Лапласу будем иметь

$$\frac{\partial \bar p}{\partial r} = r(\bar\mu(s)\bar f''' - \rho s\bar f'); \tag{4}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0; \tag{5}$$

$$\bar{f}^{IV} - \frac{\rho s}{\bar{\mu}(s)} \bar{f}'' = 0; \tag{6}$$

$$\bar{p}_{rz} = \bar{\mu}(s)\bar{f}''.$$

Интегрируя (4) при граничном условии $\bar{p}\big|_{r = R} = 0$, получим

$$\bar{p} = \frac{R^2 - r^2}{2} (\rho s\bar{f}' - \bar{\mu}(s)\bar{f}'''). \tag{7}$$

Сформулируем граничные условия для $\bar{f}$.
Из (1) следует

$$\bar{f}\big|_{z=0} = 0; \ \bar{f}'\big|_{z=0} = 0; \ \bar{f}'\big|_{z=b} = 0. \tag{8}$$

Из (2) следует

$$2\pi \int\limits_o^R r\bar{p}dr = \frac{F}{s}. \tag{9}$$

Из (7) и (9) находим

$$\bar{f}'''\big|_{z = b} = - \frac{4F}{s\bar{\mu}(s)\pi R^4}. \tag{10}$$

Решая (6) при граничных условиях (8) и (10), получим

$$\bar{f}' = \frac{4F(\operatorname{ch} \frac{\kappa b}{2} - \operatorname{ch} \kappa(z - \frac{b}{2}))}{\pi R^y \rho s^2 \operatorname{ch} \frac{\kappa b}{2}},$$

и далее по формулам обращения [2]

$$\begin{cases} v_z = \dfrac{4rF}{\rho\pi R^4} \cdot \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \dfrac{\operatorname{ch} \frac{\kappa b}{2} - \operatorname{ch} \kappa(z - \frac{b}{2})}{s^2 \operatorname{ch} \frac{\kappa b}{2}} e^{st} ds; \\ v_z = - \dfrac{8F}{\rho \pi R^4} \cdot \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \dfrac{\kappa z \operatorname{ch} \frac{\kappa b}{2} - \operatorname{sh} \kappa(z - \frac{b}{2}) - \operatorname{sh} \frac{\kappa b}{2}}{\kappa s^2 \operatorname{ch} \frac{\kappa b}{2}} e^{st} ds; \end{cases} \tag{11}$$

$$
\begin{cases}
p_{rz} = -\dfrac{4rF}{\pi R^4}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\dfrac{\operatorname{sh}\kappa(z-\frac{b}{2})}{\kappa s\cdot\operatorname{ch}\frac{\kappa b}{2}}\, e^{st}\,ds; \\
p = \dfrac{2F}{\pi R^2}\left(1-\dfrac{r^2}{R^2}\right).
\end{cases}
\tag{11}
$$

В формулах $\kappa = \left(\dfrac{\rho s}{\bar{\mu}(s)}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Интересно отметить, что для данной задачи давление p практически не зависит от реологических свойств среды.

Решение для "n"-звенной модели Максвелла. Функция релаксации имеет вид

$$\mu(t) = \sum_{i=1}^{n} G_i e^{-\frac{G_i}{\eta_i}t} \quad [3].$$

Тогда

$$\bar{\mu}(s) = \sum_{i=1}^{n}\frac{G_i}{\left(s+\dfrac{G_i}{\eta_i}\right)} = \frac{\sum\limits_{\kappa=1}^{n} G_\kappa \prod\limits_{i\neq\kappa}\left(s+\dfrac{G_i}{\eta_i}\right)}{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(s+\dfrac{G_i}{\eta_i}\right)};$$

$$\kappa^2 = \frac{\rho s \prod\limits_{i=1}^{n}\left(s+\dfrac{G_i}{\eta_i}\right)}{\sum\limits_{\kappa=1}^{n} G_\kappa \prod\limits_{i\neq\kappa}\left(s+\dfrac{G_i}{\eta_i}\right)}.$$

Для v_r, v_z, и p_{rz} получим формулы:

$$v_r = \frac{2rF(b-z)z}{\pi R^4 \sum\limits_{\kappa=1}^{n}\eta_\kappa} + \frac{8rF}{\rho b^2 R^4}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{(-1)^m(2m-1)\cos\frac{\pi}{b}(2m-1)(z-\frac{b}{2})}{s_{jm}^2}\ \times$$

$$\times\ e^{s_{jm}t}\cdot A(s_{jm});$$

$$v_z = \frac{2rFz^2(2z-3b)}{3\pi R^4 \sum\limits_{\kappa=1}^{n}\eta_\kappa} + \frac{16rF}{\pi R^4\rho b}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{1-(-1)^m\sin\frac{\pi}{b}(2m-1)(z-\frac{b}{2})}{s_{jm}^2}\ \times$$

$$\times e^{s_{jm} t} \cdot A(s_{jm});$$

$$P_{rz} = -\frac{4rF\left(z - \frac{b}{2}\right)}{\pi R^4} + \frac{8rF}{\pi R^4 b} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^m \sin \frac{\pi}{b}(2m-1)\left(z - \frac{b}{2}\right)}{s_{jm}} \times$$

$$\times e^{s'_{jm} t} \cdot A(s_{jm}),$$

где

$$A(s) = \frac{\left[\sum_{\kappa=1}^{n} G_\kappa \left(s + \frac{G_i}{\eta_i}\right)^2\right]^2}{\sum_{\kappa=1}^{n} \left[G_\kappa \left(s + \frac{G_\kappa}{2\eta_\kappa}\right) \prod_{i \neq \kappa} \left(s + \frac{G_i}{\eta_i}\right)^2\right]};$$

s_{jm} — корни уравнения

$$s \prod_{i=1}^{n} \left(s + \frac{G_i}{\eta_i}\right) + \frac{\pi^2 (2m-1)^2}{\rho b^2} \cdot \sum_{\kappa=1}^{n} G_\kappa \prod_{i \neq \kappa} \left(s + \frac{G_i}{\eta_i}\right) = 0.$$

Таким образом, получено решение задачи течения вязко-упругой среды наследственного типа между параллельными дисками при мгновенном приложении к одному из дисков постоянной силы. Определены скорости и напряжения для произвольных моделей и для "n"-звенной модели Максвелла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламбина Е.Н., Лапушина Б.И. Течение вязко-упругой среды наследственного типа между параллельными дисками при импульсном нагружении. — Весцi АН БССР, сер. фiзiка-энергетычных навук, 1978, № 1, с. 125—130. 2. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1974. —229 с. 3. Кристенсен Р. Введение в теорию вязко-упругости. — М.; Мир, 1974, с. 18.

УДК 007.52:621

Л.А.БОРИСЕНКО, канд.техн.наук (ММИ)

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ МАНИПУЛЯТОРОВ

При кинематическом исследовании манипуляторов возникает необходимость решения обратных задач: определение обобщенных координат системы и их производных по заданному движе-