

ϑ_2 должны удовлетворять условию, аналогичному $0 \leq \xi_* \leq 1$ из (15).

Применение этих уравнений в частных случаях движения $\vartheta_1 \neq 0$, $\vartheta_2 = 0$ и $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 \neq 0$ позволило достигнуть лучшего согласия с экспериментом в работах [4, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Л е в и н М.А. Новая теория бокового увода колеса, приводящая к интегрально-разностным или дифференциально-разностным уравнениям. — В сб.: 25 науч.-техн. конф. БПИ: Мат-лы секции теоретической и прикладной механики. Минск, 1969, с. 18—34.
2. Л е в и н М.А. Зависимость тангенциальной реакции от псевдоскольжения при качении упругого колеса. — ДАН БССР, 1971, т. 15, № 5, с. 414—416.
3. Истирание резин/Г.И.Бродский, В.Ф.Евстратов, Н.Л.Сахновский, Л.Д.Слюдилов — М.: Химия, 1975, с. 143—164.
4. Л е в и н М.А., С о л о н с к и й А.С., М а т а т о в а А.П. Приложение теории качения деформируемого колеса к исследованию динамики разгона трактора. В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Вышэйшая школа, 1976, вып. 3, с. 146—156.
5. Л е в и н М.А. Экспериментальное определение частотных характеристик продольной реакции катящегося деформируемого колеса. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Вышэйшая школа, 1981, вып. 8, с. 38—47.
6. Л е в и н М.А. Понижения порядка зависимостей для реакции связей катящегося деформируемого колеса. — ДАН БССР, 1974, т. 18, № 6, с. 516—519.
7. P h i l l i p s В.Д.А. The effect of longitudinal force on bias and radial tires. — Tire Science and Technology, 1976, v. 4, N 3, 155—168.

УДК 534.1:62-272.2

П.И.СОЛОВЕЙ, ст. препод. (БИСИ),
В.С.ВИХРЕНКО, канд. физ.-мат. наук (БТИ)

ВЛИЯНИЕ ПОСТОЯННОЙ СИЛЫ НА ДВИЖЕНИЕ ПРУЖИНЫ, НАВИТОЙ С ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫМ НАТЯГОМ

Характерной особенностью пружин, навитых с предварительным натягом, является то, что в свободном состоянии их витки сомкнуты и между ними существует межвитковое давление. Степень предварительного натяга определяет минимальное пороговое значение N_0 усилия, приложенного к пружине, которое способно ее растянуть. Использование таких пружин в ряде технических устройств (см., напр. [1]) предопределяет необходимость разработки методов их расчета.

В сообщении [2] рассмотрено движение защемленной одним концом пружины, которая была деформирована усилием $N > N_0$ и в некоторый начальный момент предоставлена самой себе. Расчет показал, что на свободном конце сразу же образуется зона посадки витков, фронт которой движется со скоростью, превышающей скорость распространения упругих возмущений. Поэтому часть пружины между защемленным концом и фронтом посадки витков

находится в статическом состоянии, а зона посадки движется с некоторой скоростью как твердое тело. В момент достижения фронтом посадки заземленного конца происходит удар.

Если к свободному концу пружины присоединен груз, зона посадки витков образуется лишь по истечении некоторого промежутка времени после начала движения [3], и тогда между зоной посадки витков и неподвижной частью пружины возникает участок, движение которого описывается волновым уравнением.

В настоящей работе исследуем влияние силы, приложенной к грузу на свободном конце пружины, на ее динамику. Это позволит оценить влияние силы трения, возникающей в экспериментальной установке, и сравнить теоретические и экспериментальные значения характеристик движения ударных устройств.

Рассмотрим пружину, имеющую усилие предварительного натяга N_0 , массу M и длину L_0 в свободном состоянии. К подвижному правому концу присоединяется груз M_0 , а левый ее конец крепится на неподвижной опоре. Введем в рассмотрение вспомогательную пружину, которую будем называть базовой, с параметрами, соответствующими реальной пружине, но навитую без предварительного натяга. Длина базовой пружины в естественном состоянии $l_0 < L_0$. Предполагая, что характеристика пружины линейная, запишем

$$N_0 = c \frac{L_0 - l_0}{l_0}; \quad N = c \frac{L - l_0}{l_0}, \quad (1)$$

где c — коэффициент жесткости, отнесенный к естественной длине базовой пружины; N — усилие, под действием которого базовая пружина приобретает длину L . Если усилие $N > N_0$ приложено к реальной пружине, ее длина также будет равна L .

Введем относительную деформацию пружины и два других безразмерных параметра:

$$\alpha = \frac{L - l_0}{l_0}; \quad \alpha_0 = \frac{L_0 - l_0}{l_0}; \quad \beta = \frac{\alpha_0}{\alpha}; \quad \mu = \frac{M_0}{M}. \quad (2)$$

Пусть в начальный момент реальная пружина растянута силой $N > N_0$ и о правый ее конец ударяется со скоростью v_0 груз массой M_0 . В дальнейшем система предоставлена самой себе, груз неразрывно связан с пружиной и на него действует постоянная сила F . Исследуем движение устройства.

В течение некоторого промежутка времени t_1 до образования зоны посадки движение реальной пружины не будет отличаться от движения базовой пружины. Для описания этого этапа заменим базовую пружину эквивалентным стержнем той же длины, плотности и жесткости и введем лагранжеву систему координат с началом на правом конце пружины и осью z , направленной влево (рис. 1). Движение пружины описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0; \quad (3)$$

$$0 \leq z \leq l_0; \quad a^2 = cl_0/M,$$

причем деформация $w = w(z, t)$ удовлетворяет начальным и граничным условиям:

$$w(z, 0) = w_0(z) = \varepsilon_0(z - l_0); \quad \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z \neq 0} = 0;$$

$$w(l, t) = 0; \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{z=0} = v_0;$$

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{a^2}{\mu l_0} \frac{\partial w}{\partial z} \right]_{z=0} = \frac{F}{\mu M}. \quad (4)$$

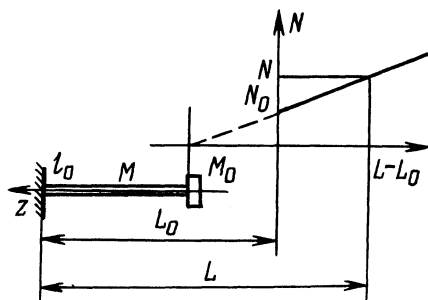


Рис. 1.

Здесь a — скорость распространения упругих возмущений.

Используя хорошо известные методы (напр., метод Даламбера, см. [4, 5]), находим решение волнового уравнения (3) при дополнительных условиях (4) в виде

$$\begin{aligned} w(z, t) &= \varepsilon_0(z - l_0) \quad \text{при} \quad t < z/a; \\ w(z, t) &= -\tilde{\varepsilon}_0(l_0 - at) - \frac{F}{c}(z - l_0) - \\ &- \mu l_0 \tilde{\varepsilon}_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{at - z}{\mu l_0}\right) \right] \quad \text{при} \quad \frac{z}{a} \leq t \leq \frac{l_0}{a}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\tilde{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0 + F/c; \quad \tilde{\varepsilon}_1 = \tilde{\varepsilon}_0 - v_0/a. \quad (6)$$

Зона посадки образуется в тот момент, когда градиент деформации в некоторой точке пружины достигнет значения ε_0 . В соответствии с (5) градиент деформации

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \tilde{\varepsilon}_1 \exp\left(-\frac{at-z}{\mu l_0}\right) - \frac{F}{c} \quad (7)$$

минимален на правом конце пружины ($z=0$). Приравнивая его ε_0 , находим момент начала образования зоны посадки

$$t_1 = \frac{\mu l_0}{a} \ln \frac{\tilde{\varepsilon}_1}{\varepsilon_0}, \quad \tilde{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0 + \frac{F}{c}. \quad (8)$$

Если $\tilde{\varepsilon}_1 \leq \tilde{\varepsilon}_0$, зона посадки образуется в начальный момент ($t_1 = 0$) и для дальнейшего исследования движения устройства можно использовать методику, разработанную в [2].

Отметим, что в приведенных выше рассуждениях не накладывались ограничения на знаки величин v_0 и F . Более того, рассматриваемый подход позволяет исследовать образование зоны посадки витков в пружинах, навитых без межвиткового давления. В этом случае коэффициент ε_0 отрицателен и определяется соотношением

$$\varepsilon_0 = \frac{nd - l_0}{l_0}; \quad nd < l_0, \quad (9)$$

где n — число витков пружины; d — диаметр проволоки, из которой навита пружина; l_0 — длина пружины в ненапряженном состоянии.

Проанализируем движение реальной пружины при $t_1 \leq t \leq l_0/a$. Скорость v движения сомкнутой части пружины и скорость \dot{z}_Φ перемещения фронта посадки связаны между собой соотношением [3]

$$v = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=z_\Phi} - \varepsilon_0 \dot{z}_\Phi + \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{z=z_\Phi} \quad (10)$$

Предположим (а в дальнейшем докажем), что $\dot{z}_\Phi \geq a$ начиная с момента образования зоны посадки. В этом случае фронт посадки витков движется быстрее распространения упругих возмущений и поэтому перед фронтом посадки ($z > z_\Phi$) состояние пружины описывается решением (5) волнового уравнения.

Динамика зоны посадки описывается уравнением движения точки переменной массы, но в данном случае удобнее воспользоваться теоремой об изменении импульса. Сила, действующая на часть пружины, расположенную правее некоторой точки $z = z_\Phi$ равна

$$N(t) = \begin{cases} N & \text{при } t' < z_\Phi/a; \\ c \frac{\partial w}{\partial z}\bigg|_{z=z_\Phi} = c \tilde{\varepsilon}_1 \exp\left(-\frac{at' - z_\Phi}{\mu l_0}\right) - F & \text{при } z_\Phi/a \leq t' \leq t. \end{cases} \quad (11)$$

Применяя теорему об изменении импульса к части пружины, находящейся правее точки $z = z_{\Phi}$ на протяжении промежутка времени от начала движения и до момента t , когда фронт посадки приходит в точку $z = z_{\Phi}$, запишем

$$\begin{aligned} & (M_0 + \frac{z_{\Phi}}{l_0} M) \left\{ [\tilde{\alpha}_1 \exp(-\frac{at - z_{\Phi}}{\mu l_0}) - \tilde{\alpha}_0] \frac{dz_{\Phi}}{dt} + \right. \\ & \left. + \tilde{\alpha} a - \tilde{\alpha}_1 a \exp(-\frac{at - z_{\Phi}}{\mu l_0}) \right\} - M_0 v_0 = (N + F) \frac{z_{\Phi}}{a} + \\ & + \int_{z_{\Phi}/a}^t c \tilde{\alpha}_1 \exp(-\frac{at' - z_{\Phi}}{\mu l_0}) dt'. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь для v использовано соотношение (10) совместно с (5) и (7). Учитывая $N+F = c\tilde{\alpha}$, приходим к выводу, что уравнение (12) аналогично уравнению (14) работы [3] с очевидной заменой $\tilde{\alpha}_0 \rightarrow \tilde{\alpha}$ и $\tilde{\alpha}_1 \rightarrow \tilde{\alpha}_1$. Поэтому, переходя к безразмерным переменным

$$y = \frac{z_{\Phi} - a(t - t_1)}{\mu l_0}; \quad s = \frac{a(t - t_1)}{\mu l_0}; \quad u = \frac{v}{a}. \quad (13)$$

приведем уравнение (12) к виду

$$\frac{ds}{dy} = \frac{e^y - 1}{1 - e^y(1 + s + y)^{-1}}; \quad s = 0 \text{ при } y = 0. \quad (14)$$

Здесь s играет роль безразмерного времени, а y определяет в безразмерной форме разность расстояний, проходимых фронтами зон посадки и упругих возмущений, начиная с момента t_1 зарождения зоны посадки. Поскольку к этому моменту времени фронт зоны упругих возмущений пройдет расстояние at_1 , встреча фронтов происходит при

$$y = at_1 / \mu l_0 = \ln(\tilde{\alpha}_1 / \tilde{\alpha}_0). \quad (15)$$

Решение уравнения (14) имеет вид

$$s = 2e^y - y - 2, \quad (16)$$

в чем нетрудно убедиться непосредственной подстановкой. То что $(dy/ds) = (2e^y - 1)^{-1} > 0$ при $y > 0$, подтверждает выводы работы [3] о свойствах уравнения (14) и, в частности, неравенство $\dot{z}_{\Phi} > a$, необходимое для корректности проделанных вычислений. Значе-

ние $s_1 = s(y_1)$ позволяет найти время t_2 встречи фронтов зон посадки и упругих возмущений

$$t_2 = \frac{\mu l_0}{a} s_1 + t_1 = \frac{\mu l_0}{a} s_2; \quad (17)$$

$$s_2 = 2\left(\frac{\tilde{\alpha}_1}{\tilde{\alpha}_0} - 1\right). \quad (18)$$

Естественно, приведенным решением можно пользоваться, если $t_2 \leq l_0/a$. В противном случае необходимо учитывать отраженную от левого конца упругую волну, что не входит в задачу настоящей работы.

Предположим, что неравенство $t_2 \leq l_0/a$ выполнено. Тогда при $t > t_2$ пружина состоит, как и в [2], из двух участков — движущегося со скоростью v сомкнутого участка и неподвижного, сохраняющего начальную деформацию, между левой опорой и фронтом посадки. Расчет этого этапа движения производится аналогично [2, 3] с помощью теоремы об изменении импульса. В безразмерных

переменных ($x = \frac{z\phi}{\mu l_0}$, $s = at/\mu l_0$) зависимость времени от положения фронта зоны посадки выражается соотношением

$$s = \left\{ \left(\frac{u_0}{\tilde{\alpha}} + s_2 \right)^2 + \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}} (1 - \beta) (1 + x)^2 - (1 + s_2)^2 \right\}^{1/2} - \frac{u_0}{\tilde{\alpha}}. \quad (19)$$

В момент удара $x = \mu^{-1}$ и поэтому время движения до удара о левую опору

$$t^* = \frac{\mu l_0}{a} s^* = \frac{l_0}{a} \left\{ (1 - \beta) \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}} [(1 + \mu)^2 - \mu^2 (1 + s_2)^2] + \mu^2 \left(\frac{u_0}{\tilde{\alpha}} + s_2 \right)^2 \right\}^{1/2} - \frac{\mu l_0}{a} \frac{u_0}{\tilde{\alpha}}. \quad (20)$$

Используя в (20) для s_2 выражение (18), получим после ряда алгебраических преобразований соотношение, удобное для дальнейшего анализа:

$$t^* = t_0^* \left\{ 1 - \frac{F}{\tilde{\alpha} c} \left[1 - \frac{\mu^2}{1 + 2\mu} (2 + s_2) s_2 \right] + \frac{\mu^2}{1 + 2\mu} \left(\frac{u_0}{\tilde{\alpha}} + 2s_2 \right) \frac{u_0}{\tilde{\alpha}} \right\}^{1/2} - \frac{\mu l_0}{a} \frac{u_0}{\tilde{\alpha}}; \quad (21)$$

$$t_0^* = \frac{l_0}{a} \sqrt{(1 - \beta)(1 + 2\mu)} = \sqrt{\frac{M(L - L_0)}{N} (1 + 2\mu)}. \quad (22)$$

Зависимость времени движения устройства до удара от F и u_0 в (21) представлена отдельными слагаемыми, а t_0^* соответствует

предельному случаю, когда $F = 0$ и $u_0 = 0$. При анализе (21), естественно, нужно иметь в виду, что ε и s_2 зависят от F и u_0 .

Исследуем в (22) зависимость коэффициента при $F/c\tilde{\varepsilon}$ от μ . Его значение максимально при $\mu = 0$ и с ростом μ монотонно убывает до нуля при $\mu = s_2^{-1}$, т.е. для значения μ , обеспечивающего встречу фронтов зоны посадки и упругих возмущений на левом заземленном конце пружины. Другими словами, влияние на t^* приложенной к свободному концу пружины силы F убывает с увеличением присоединенной массы.

Рассмотрим далее случай, когда $u_0 = 0$ и $\mu = s_2^{-1}$, а s_2 определяется выражением (18). При этом $t_o^* = t_o^*$ и сила F не оказывает влияния на время движения устройства до удара, хотя характер движения зависит от F . Действительно, предельное значение $\mu = s_2^{-1}$, при котором выполняется принятое ограничение $t^* \leq l_0/a$, зависит от величины приложенной силы

$$\mu_{\max} = \frac{\varepsilon_0 + F/c}{2(\varepsilon - \varepsilon_0)}. \quad (23)$$

Поэтому, если рассматривать движение устройства при $F = 0$, но выбрать M_0 из условия $\mu = \mu_{\max}^F$ при μ_{\max}^F , соответствующем некоторому значению $F < 0$, встреча фронтов зон посадки и упругих возмущений произойдет не на левом конце пружины (как это произошло бы при $F \neq 0$), а несколько ранее. Прилагая силу $F > 0$, можно повысить предельное значение μ_{\max} .

Экспериментальная проверка полученных соотношений проводилась на установке, описанной в [2]. К свободному концу пружины подсоединялся груз, к которому крепилось перо самописца. В табл. 1 приведены результаты измерений для пружины с параметрами: $M = 0,21$ кг, $L_0 = 0,456$ м; $n = 285$; $N_0 = 15,2$ Н. Пружина удлинялась на $0,082$ м под действием силы $N = 23$ Н. На основании этих данных находим $c = 28,4$ Н; $l_0 = 0,297$ м; $a = 6,34$ м/с.

Таблица 1.

$L - L_0$ (10^{-2} м)	t_o^* (мс)	μ					
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
4,1	эксп.	21,5	22,2	23,7	26,0	27,9	31,0
	теор.	21,2	23,2	25,0	26,8	28,4	30,0
6,0	эксп.	25,0	26,2	28,8	31,5	32,9	35,8
	теор.	24,5	26,8	29,0	31,0	32,9	34,6
8,2	эксп.	27,8	29,5	32,2	34,8	37,2	40,8
	теор.	27,4	30,0	32,4	34,6	36,7	38,7

Для сопоставления экспериментальных и теоретических значений существенный интерес представляет оценка влияния сил трения. В используемой установке $F_{\text{тр}} \approx f(M/2 + M_0)g$; $f \approx 0,1$; $F = F_{\text{тр}}$. Как правило, выполняется достаточно сильное неравенство $F_{\text{тр}} \ll c \Delta x = N$. В этом случае (22) можно разложить в ряд и ограничиться первыми двумя слагаемыми:

$$t^* = t_0^* \left(1 + a_F \frac{F_{\text{тр}}}{N} \right); \quad (24)$$

$$a_F = \frac{1}{2} \left[1 - 4 \frac{\mu^2}{1 + 2\mu} \frac{\alpha(\alpha - \alpha_0)}{\alpha_0^2} \right] \leq \frac{1}{2}.$$

Приведенная оценка показывает, что сила трения может привести к увеличению времени движения примерно на 1%. Эта величина находится в пределах погрешности экспериментальной установки, связанной с неточностью отсчета времени и наличием определенной неоднородности характеристик пружины по ее длине и составляющей величину около 5%. Поэтому в таблице проведено сопоставление экспериментальных значений времени движения устройства до удара с t_0 .

Отметим, что если при $\mu = 0$ график движения конца пружины получился линейным, то при $\mu \geq 0,2$ непостоянство скорости движения было четко выраженным и находилось в соответствии с выражением (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. А.с. 173658 (СССР). Электромеханический молоток/П.М.Алабужев, А.К.Зуев, В.А.Каргин, А.М.Трусь. — Опул. в Б.И., 1965, № 15. 2. В и х р е н к о В.С., Г у с ь к о в А.М., С о л о в е й П.И. Удар пружинной, навитой с предварительным натягом. — Изв. ВУЗов. Машиностроение, 1981, № 8. с. 28—32. 3. В и х р е н к о В.С., С о л о в е й П.И. Динамика навитой с предварительным натягом пружины с присоединенной массой. — В сб.: Расчеты на прочность, М., 1983, вып. 24. 4. Т и х о н о в А.Н., С а м а р с к и й А.А. Уравнения математической физики. — М.: ГИТТЛ, 1953. — 680 с. 5. Б и д е р м а н В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980, с. 173—180.

УДК 534.11

В.В.ТАЛЕЦКИЙ, канд.техн.наук,
А.Н.ДУБКО (БИИЖТ)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕРАЗРЕЗНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ БАЛОК, ПРИВЕДЕННЫХ К СХЕМАМ С ДИСКРЕТНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ МАССЫ

Расчет собственных частот поперечных колебаний многопролетных неразрезных балок, несущих полезную нагрузку, представ-