Напряжения на границе контактной области, принимаемой в расчет, в итоге необходимо положить равными 0. Для решения конкретных задач на ЭВМ ЕС 1022 была составлена программа, которая по заданным размерам конструктивных элементов безбазовых сопряжений и характеристикам бетона дает возможность определять напряжения и внутренние усилия в элементах. Результаты решения одного из примеров приведены на рис. 4.

Этот пример решался при различных значениях контактной области по линиям AL и OF и исследовалось влияние размеров этих областей на распределение усилий в детали. Результаты показали, что если OF, AL > 3l, то размеры этих областей не оказывают значительного влияния на распределения усилий в детали. На рис. 4. данные приведены при OF = 4l и AL = 4l.

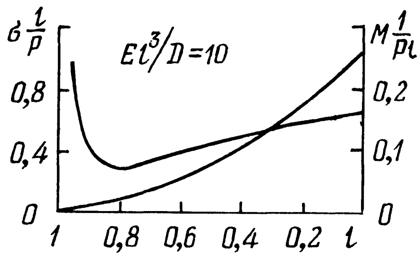

Рис. 4. Эпюры нормальных напряжений и изгибающих моментов в детали.

В заключение отметим, что при действии на деталь силы противоположного направления (рис. 1) решение задачи приведено в работе [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Жемочкин Б.Н., Синицын А.П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. — М.: Стройиздат, 1962. — 239 с. 2. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. — М.–Л.: Наука, 1967. — 402 с. 3. Развитие теории контактных задач в СССР/ Под ред. Л.А. Галина. — М.: Наука, 1976. — 443 с. 4. Босаков С.В. Расчет клина с краевым разрезом. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Вышэйшая школа, 1981, вып. 8, с. 96—99. 5. Босаков С.В. Расчет заглубленных анкерных плит конечной жесткости. — Прикладная механика, т. XVI, 1980, № 3, с. 82—87.

УДК 539.3:539.4.013

С.Ф.АНДРЕЕВ, ассистент (ГПИ)

К РЕШЕНИЮ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ

Метод определения концентрации напряжений вблизи малого криволинейного отверстия на боковой поверхности цилиндрической оболочки изложен в работе [1]. Следуя [2], этот метод может быть распространен на определение концентрации напряжений возле отверстий в конических оболочках.

Пусть тонкая коническая оболочка с впаянной шайбой из другого материала находится под действием внешнего давления. Предполагая размеры шайбы малыми по сравнению с расстоянием ее до вершины конуса, напряженно-деформированное состояние оболочки находим последовательным решением ряда дифференциальных уравнений [2]

$$\Delta\Delta\Omega^{(o)} + 8i\beta^2 \frac{\partial^2 \Omega^{(o)}}{\partial x^2} = 0;$$

$$\Delta\Delta\Omega^{(j)} + 8i\beta^2 \frac{\partial^2 \Omega^{(j)}}{\partial x^2} = i\beta^2 \sum_{l=1}^{j} \Pi_l \Omega^{(j-l)},$$

в которых решение однородных частей можно свести [1] к обобщенной бигармонической задаче для бесконечной пластинки.

Отнесем срединную плоскость бесконечной пластинки S_1 и шайбы S_o к системе координат $z = x + iy$, начало которой поместим внутри области S_o.

Используя функции

$$\omega_o(\xi) = \sum_{\kappa=1}^{m} C_\kappa \xi^\kappa; \ \omega_1(\xi) = r_o(\xi + \sum_{\kappa=1}^{n} C_\kappa \xi^{-\kappa}),$$

конформно отображаем упругие области S_o и S_1 на координатные плоскости

$$|\xi| \leqslant 1; \ |\xi| \geqslant 1.$$

Считая, что контур свободен от внешних усилий и перемещений, запишем для искомых комплексных потенциалов [3]

$$\Phi_o(\xi) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_{o,\kappa}\xi^\kappa; \ \psi_o(\xi) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} b_{o,\kappa}\xi^\kappa;$$

$$\Phi_1(\xi) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_{1,\kappa}\xi^{-\kappa}; \ \Psi_1'(\xi) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} b_{1,\kappa}\xi^{-\kappa},$$

граничные условия при $\xi = \sigma$

$$\chi\left\{\omega_o'(\sigma)[\delta_{j,o}\Phi_o(\sigma) - \lambda_j\overline{\Phi_o(\sigma)}] + \lambda_j \frac{\bar\sigma}{\sigma}[\omega_o(\sigma)\overline{\Phi_o'(\sigma)} + \right.$$
$$\left. + \overline{\omega_o'(\sigma)}\overline{\Psi_o(\sigma)}]\right\} = \omega_1'(\sigma)[\delta_{j,1}\Phi_1(\sigma) - \lambda_j\overline{\Phi_1(\sigma)}] + \lambda_j\frac{\bar\sigma}{\sigma}[\omega_1(\sigma)\overline{\Phi_1'(\sigma)} +$$
$$+ \overline{\omega_1'(\sigma)}\,\overline{\Psi_1(\sigma)}]. \qquad (1)$$

Коэффициенты $\delta_{j,i}$, λ_j определяются следующим образом:

— первая основная задача плоской теории упругости

$$\lambda_1 = 1; \ \delta_{1,i} = 1;$$

— вторая основная задача плоской теории упругости

$$\lambda_2 = -1;\ \delta_{2,i} = -3 + 4\nu_i;$$

— первая основная задача теории изгиба тонких плит

$$\lambda_1 = 1;\ \delta_{1,i} = -\frac{3+\nu_i}{1-\nu_i};$$

— вторая основная задача теории изгиба тонких плит

$$\lambda_2 = -1;\ \delta_{2,i} = 1.$$

Считая основное напряженно-деформированное состояние оболочки известным в точке 0, которая соответствует центру шайбы, вычислим компоненты M_τ, M_θ, $M_{\tau\theta}$; T_τ, T_θ, $T_{\tau\theta}$, и зададим их на бесконечности области S_1. Нулевые коэффициенты искомых функций, определяющие однородное напряженно-деформированное состояние области, примут вид

$$a_{1,o} = \frac{r_o(M_\tau + M_\theta)}{4D_1\omega_1'(\xi)(1+\nu_1)};\quad b_{1,o} = \frac{r_o(M_\theta - M_\tau + 2iM_{\tau\theta})}{2D_1\omega_1'(\xi)(1+\nu_1)} \text{ —}$$

для теории изгиба тонких плит;

$$a_{1,o} = -\frac{r_o(T_\tau + T_\theta)}{4D_1\omega_1'(\xi)(1+\nu_1)};\quad b_{1,o} = \frac{r_o(M_\theta - M_\tau + 2iM_{\tau\theta})}{2D_1\omega_1'(\xi)(1+\nu_1)} \text{ — для плос-}$$

кой теории упругости.

Пренебрегая действием на шайбу внешних сил, будем считать главные векторы внешних усилий, приложенных к границе [3], равными нулю. Тогда имеем $a_{1,1} = b_{1,1} = \mathrm{Jm}\,a_{o,o} = 0$. Перемножив ряды в (1) после преобразований, получим системы линейных алгебраических уравнений [4] для плоской задачи теории упругости и теории изгиба тонких плит:

$$\chi[\delta_{j,o}\sum_{l=0}^{-m+1+\kappa}(1+\kappa-l)a_{o,l}C_{o,1+\kappa-1} - \lambda_j\sum_{l=0}^{m-\kappa-1}(1+\kappa)\bar{a}_{o,l}C_{o,1+\kappa+l}] =$$

$$= r_o\Big\{\delta_{j,1}a_{1-\kappa} - \lambda_j[\sum_{l=0}^{n+\kappa+1}(1+\kappa)\bar{a}_{1,l}C_{1,l-\kappa-1} + (1+\kappa)\bar{a}_{1,\kappa} +$$

$$+ \sum_{l=0}^{\kappa}(\kappa+1-l)\bar{b}_{1,l}\bar{C}_{1,\kappa-1-l} - \bar{b}_{1,2+\kappa}]\Big\}$$

для $\kappa = 0,1,2,\ldots p$,

$$\chi\lambda_j[\sum_{l=0}^{\kappa-2}(\kappa-1)\bar{b}_{o,l}\bar{C}_{o,\kappa-1-l} - \sum_{l=0}^{m-1-\kappa}(1+\kappa)\bar{a}_{o,l}C_{o,l-\kappa+1}] =$$

$$=r_o\left\{\delta_{j,1}[a_{1,\kappa}+\sum_{l=0}^{\kappa-2}(\kappa-1)a_{1,l}C_{1,\kappa-1-l}]+\lambda_j[\sum_{l=0}^{n-\kappa+1}(\kappa-1)\times\right.$$

$$\left.\times a_{1,l}C_{1,\kappa+l-1}+\bar{b}_{1,2-\kappa}]\right\}$$

для $\kappa = 2, 3, \ldots, p-6$, где $j = 1,2$.

Выбрав число p, решаем систему $(2p-6)$-го порядка, в которой, разделив мнимые и действительные части, находим коэффициенты искомых функций.

Для дальнейшего вычисления комплексных потенциалов первого приближения [1] положим усилия не бесконечности равными нулю и решим граничную задачу относительно функций $\Phi(\xi)$, $\Psi(\xi)$:

$$\omega_1'(\sigma)[\delta_{j,1}\Phi(\sigma)-\lambda_j\overline{\Phi(\sigma)}]+\lambda_j\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}[\omega_1\overline{(\sigma)\Phi}'(\sigma)+\overline{\omega_1'(\sigma)}\ \overline{\Psi(\sigma)}]= \tag{3}$$

$$=\omega_1'(\sigma)[\delta_{j,1}\Phi_1(\sigma)-\lambda_j\overline{\Phi_1(\sigma)}]+\lambda_j\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}[\omega_1(\sigma)\overline{\Phi_1'(\sigma)}+\overline{\omega_1'(\sigma)}\overline{\Psi_1(\sigma)}].$$

В качестве примера рассмотрим чистый изгиб бесконечной пластинки с круглой шайбой радиуса r_o. Пусть на бесконечности заданы моменты $M_\tau = M_\theta = M$.

Тогда

$$a_{1,o}=-\frac{M}{2D_1(1+\nu_1)};\ b_{1,o}=0.$$

Считая, что $\omega_o(\xi)=\omega_1(\xi)=r_o\xi$ решаем систему уравнений (2)

$$\sigma^{-p};\ \delta_{j,1}a_{1,p}-\chi[(p-1)\bar{a}_{o,p}-\lambda_j\bar{b}_{o,p-2}]=0;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma^{-2};\ \delta_{j,1}a_{1,2}-\chi[\lambda_j\bar{a}_{o,2}-\lambda_j\bar{b}_{o,o}]=0;$$

$$\sigma^{o};\chi a_{oo}(\lambda_j-\delta_{j,o})+\lambda_j\bar{b}_{1,2}=(\lambda_j-\delta_{j,1})a_{1,o};$$

$$\sigma^{1};\lambda_j\bar{b}_{1,3}-\chi\delta_{j,o}=0;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma^{p-6};-(p-5)\lambda_j\bar{a}_{1,p-6}+\lambda_j\bar{b}_{1,p-4}-\chi\delta_{j,o}a_{o,p-6}=0,$$

из которой получаем

$$\Phi_1(\xi) = -\frac{M}{2D_1(1+\nu_1)}; \quad \Psi_1(\xi) = -\frac{M}{D_1(1+\nu_1)}\left[1 - \frac{1-\delta_{11}}{2-\chi(\delta_{10}+1)}\right]\xi^{-2};$$

$$\Phi_o(\xi) = -\frac{M}{2D_1(1+\nu_1)} \cdot \frac{1-\delta_{11}}{2-\chi(\delta_{10}+1)}; \quad \Psi_o(\xi) = 0.$$

Подставляя в (4) значения $\chi = 0; \chi = \infty$, получаем известные решения для предельных случаев абсолютно гибкой и абсолютно жесткой шайбы. Рассматривая граничную задачу (3), находим окончательное решение

$$\Phi(\xi) = 0; \quad \Psi(\xi) = -\frac{M}{D_1(1-\nu_1)}\left[1 - \frac{2}{2-\chi(\delta_{10}+1)}\right]\xi^{-2};$$

$$\chi = \frac{D_o(1-\nu_o)}{D_i(1+\nu_1)},$$

которое удовлетворяет условию равномерно распределенных моментов по контуру отверстия

$$M_\rho = -M_\theta = -\frac{M}{D_1(1-\nu_1)}\, b_2.$$

Значения коэффициента b_2 для алюминиевой пластинки с шайбами из различного материала приведены в табл. 1.

Таблица 1.

Абсолютно жесткая шайба	1
Сталь	0,87200
Стекло	0,66600
Свинец	0,544100
Каучук	0,000083
Абсолютно гибкая шайба	0

ЛИТЕРАТУРА

1. Чехов Вал., Чехов Вик. Приближенный метод определения напряжений в круговой цилиндрической оболочке. — Прикладная механика, т. 4, вып. 8, 1968, с. 40—48. 2. Гузь А.Н. Конические оболочки, ослабленные отверстиями.— Киев: Наукова думка, 1976, с. 35—42. 3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: АН СССР, 1954, с. 196—203. 4. Андреев С.Ф., Косых Э.Г. О напряженном состоянии пластинки, ослабленной отверстием. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск, 1976, с. 123—131.