

$\nu = 0,16667$. Расчеты показали, что учет смятия приводит к построению устойчивых численных алгоритмов решения соответствующих интегральных уравнений задачи, причем параметр регуляризации имеет определенный механический смысл. На рис. 1,2 представлены некоторые решения рассматриваемой задачи при соотношении модулей упругости $\frac{E}{E_0} = 10$. Сплошной линией дано решение с учетом смятия, штриховой — без учета смятия.

ЛИТЕРАТУРА

1. К и ш к и н Б.П. О научной и педагогической деятельности профессора Г.Э.Проктора. — В сб.: Проблемы истории математики и механики. М.: Изд-во МГУ, 1975, вып. 2, с. 79—82. 2. Ку з н е ц о в В.И. Упругое основание. — М.: Госиздлит. по строит. и архит., 1952, с. 46—51. 3. М у ш т а р и Х.М. Теория изгиба плит средней толщины. — Изв. АН СССР ОТН. Механика и машиностроение, 1959, № 2, с. 107—113. 4. Г а б д у л х а е в Б.Г. Об одном прямом методе решения интегральных уравнений. — Изв. вузов. Математика, 1965, № 3, с. 52—60.

УДК 539.3

Н.Я.БОЙКО, ассистент (БПИ)

СЖАТИЕ УПРУГОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ТРЕУГОЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ

Рассмотрим задачу статики для упругого прямоугольного параллелепипеда при следующих граничных условиях (рис. 1) :

$$\text{при } z = \pm \frac{h}{2} \quad w = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0; \quad (1)$$

$$\text{при } y = + \frac{b}{2} \quad \sigma_y = Y_y^+; \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0; \quad (2)$$

$$\text{при } y = - \frac{b}{2} \quad \sigma_y = Y_y^-; \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0; \quad (3)$$

$$\text{при } x = \pm \frac{a}{2} \quad \sigma_x = \tau_{yx} = \tau_{zx} = 0, \quad (4)$$

где

$$Y_y^+ = \left(\frac{2|z|}{h} - 1 \right) q_{\max}; \quad (5)$$

$$Y_y^- = - \left(\frac{2|z|}{h} - 1 \right) q_{\max}; \quad (6)$$

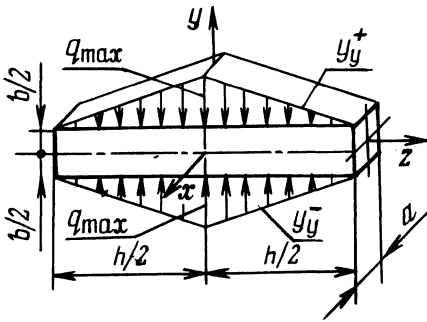


Рис. 1. Схема сжатия упругого прямоугольного параллелепипеда треугольной нагрузкой.

$$\begin{aligned}
 |z| &= \frac{h}{4} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h}{\pi^2 i^2} (\cos \pi i - 1) \cos \left(\frac{2\pi iz}{h} \right) = \\
 &= \frac{h}{4} - \frac{2h}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^2} \cos \left[\frac{2\pi(2i-1)z}{h} \right]. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Общее решение задачи сжатия описывают следующие компоненты вектора упругих перемещений, представленные рядами Фурье и полиномами Лежандра [1]:

$$\begin{aligned}
 u &= U_{00} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) U_{02} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{z^2}{h^2} - 1 \right) U_2 + \\
 &+ \sum_{\kappa=1}^{\infty} U_{0\kappa c} \cos \left(\frac{2\pi \kappa y}{b} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \cos \left(\frac{2\pi iz}{h} \right) [U_{ic0} + \\
 &+ \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) U_{ic2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} U_{i\kappa c} \cos \left(\frac{2\pi \kappa y}{b} \right)]; \\
 v &= \frac{2y}{b} V_{01} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{z^2}{h^2} - 1 \right) V_2 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} V_{0\kappa s} \sin \left(\frac{2\pi \kappa y}{b} \right) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{\infty} \cos \left(\frac{2\pi iz}{h} \right) \left[\frac{2y}{b} V_{ic1} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} V_{i\kappa s} \sin \left(\frac{2\pi \kappa y}{b} \right) \right]; \\
 w &= \frac{2z}{h_1} W_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \sin \left(\frac{2\pi iz}{h} \right) [W_{is0} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \times \\
 &\times W_{is2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} W_{i\kappa c} \cos \left(\frac{2\pi \kappa y}{b} \right)]. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Для решения задачи используются объемные уравнения равновесия, полученные из вариационного уравнения равновесия элементарного столбика тела [2], и поверхностные уравнения, являющиеся следствием удовлетворения краевых условий на гранях $y = \pm \frac{b}{2}$ и выступающие в роли связей.

Вариационному уравнению равновесия элементарного столбика тела и краевым условиям подчиняется весь ряд.

В качестве возможных перемещений взяты функции ряда Фурье.

Решение систем поверхностных и объемных дифференциальных уравнений, объединяющих искомые функции рядов (8), приводит к разрешающим уравнениям относительно функций V_{01} и V_{ic1} :

$$\frac{(\gamma-1)\partial_1^2 b}{\delta \sin^2\left(\frac{b\partial_1}{2}\right)} \left(\frac{\sin b\partial_1}{b\partial_1} + 1\right) V_{01} = \frac{1}{2Gh} \int_{-h/2}^{h/2} (Y_y^+ - Y_y^-) dz; \quad (9)$$

$$\frac{(\gamma-1)\Delta_1^2 b}{\gamma \sin^2\left(\frac{b\Delta_1}{2}\right)} \left(\frac{\sin b\Delta_1}{b\Delta_1} + 1\right) V_{ic1} = \frac{1}{Gh} \int_{-h/2}^{h/2} (Y_y^+ - Y_y^-) \cos\left(\frac{2\pi iz}{h}\right) dz, \quad (10)$$

где

$\partial_1 = \frac{d}{dx}$; $\Delta_1 = \sqrt{\partial_1^2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2}}$; $\gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$; ν — коэффициент Пуассона; G — модуль сдвига.

Решение уравнений (9) и (10) для задачи сжатия имеет соответственно следующий вид:

$$V_{01} = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \operatorname{ch}(\lambda_m x) + V_{01}^*; \quad (11)$$

$$V_{ic1} = \sum_{m=1}^{\infty} D_{mi} \operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda_m^2 + \frac{4\pi^2 i^2}{h^2}} x\right) + V_{ic1}^*, \quad (12)$$

$$V_{01}^* = -\frac{\gamma b}{16(\gamma-1)G} q_{\max};$$

$$V_{ic1}^* = \frac{q_{\max} \gamma h^2 (\cos \pi i - 1) \operatorname{sh}^2\left(\frac{b\pi i}{h}\right)}{2(\gamma-1)G b \pi^4 i^4 \left[1 + \frac{h}{2b\pi i} \operatorname{sh}\left(\frac{2b\pi i}{h}\right)\right]},$$

где λ_m — комплексно сопряженные корни уравнения

$$\sin b\lambda_m + b\lambda_m = 0.$$

Остальные функции рядов (8) выражаются через (11), (12) и решения соответствующих уравнений.

После проверки построенного таким образом решения на удовлетворение уравнениям Ламе и граничным условиям (2), (3) имеем следующий вид компонент вектора упругих перемещений вдоль оси y и z :

$$\begin{aligned}
v &= \frac{2y}{b} \sum_{i=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi iz}{h}\right) \left[\sum_{m=1}^{\infty} D_{mi} \operatorname{ch}(\Delta_2 x) + V_{ic1}^* \right] + \\
&+ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi iz}{h}\right) \sin\left(\frac{2\pi \kappa y}{b}\right) \frac{2\lambda_m^2 (-1)^\kappa}{\gamma \pi \kappa \Delta_3^2} \cdot \\
&(\gamma \lambda_m^2 + \gamma_2 \frac{4\pi^2 \kappa^2}{b^2}) D_{mi} \operatorname{ch}(\Delta_2 x) + \frac{2v}{b} V_{01}^* + \\
&+ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{\infty} V_{ic\kappa s}^* \cos\left(\frac{2\pi iz}{h}\right) \sin\left(\frac{2\pi \kappa y}{b}\right); \\
w &= \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2\pi iz}{h}\right) \left[W_{is0}^* + \frac{4\gamma_2 \pi i}{\gamma b h} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{mi}}{\lambda_m^2} \operatorname{ch}(\Delta_2 x) \right] + \\
&+ \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2\pi iz}{h}\right) \left[W_{is2}^* + \frac{b\pi i}{3h} \sum_{m=1}^{\infty} D_{mi} \operatorname{ch}(\Delta_2 x) + \right. \\
&+ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2\pi iz}{h}\right) \cos\left(\frac{2\pi \kappa y}{b}\right) \operatorname{ch}(\Delta_2 x) D_{mi} \frac{2bi\lambda_m^2 (-1)^\kappa}{\gamma h \pi \kappa^2 \Delta_3^2} \cdot \\
&\times \left. \left[(3\gamma - 2) \frac{4\pi^2 \kappa^2}{b^2} - \gamma \lambda_m^2 \right] + \sum_{i=1}^{\infty} B_i \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi ix}{h}\right) \sin\left(\frac{2\pi iz}{h}\right) + \right. \\
&+ \left. \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{\infty} W_{is\kappa c}^* \sin\left(\frac{2\pi iz}{h}\right) \cos\left(\frac{2\pi \kappa y}{b}\right) \right],
\end{aligned}$$

где

$$V_{ic\kappa s}^* = \frac{2(-1)^{\kappa} i^2 V_{ic1}^*}{\gamma \pi \kappa h^2} \left(\frac{\kappa^2}{b^2} + \frac{i^2}{h^2} \right)^{-2} \left(\gamma \frac{i^2}{h^2} - \gamma_2 \frac{\kappa^2}{b^2} \right);$$

$$W_{is0}^* = - \frac{\gamma_2 h}{\gamma b \pi i} V_{ic1}^* ;$$

$$W_{is2}^* = \frac{b\pi i}{3h} V_{ic1}^* ;$$

$$W_{is\kappa c}^* = - \frac{h\kappa}{bi} V_{ic\kappa s}^* - \frac{6(-1)^\kappa}{\pi^2 \kappa^2} W_{is2}^* + \frac{2bi(-1)^\kappa}{(\gamma-1)\pi h \kappa^2} V_{ic1}^* -$$

$$- \frac{hb}{(\gamma-1)i\kappa} \left(\frac{\kappa^2}{b^2} + \frac{i^2}{h^2} \right) V_{ic\kappa s}^* ,$$

где

$$\Delta_2 = \sqrt{\lambda_m^2 + \frac{4\pi^2 i^2}{h^2}} ; \Delta_3 = \lambda_m^2 - \frac{4\pi^2 \kappa^2}{b^2} .$$

Краевые условия на грани $z = \pm \frac{h}{2}$ выполняются точно непосредственной подстановкой, на гранях $y = \pm \frac{b}{2}$ и $x = \pm \frac{a}{2}$ в интервальном виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушевский А.Е. Общее решение задачи о равновесии упругого цилиндрического тела. — В сб.: 25-я науч.-техн. конф. БПИ: Материалы секции теорет. и прикл. механики. Минск, 1969, с. 3—12. 2. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. — Минск: Наука и техника, 1967. — 228 с.

УДК 624.072.2

С.Г. БЫКОВСКИЙ, канд. техн. наук (БПИ)

СПОСОБ ОПТИМАЛЬНОЙ КОРРЕКТИРОВКИ СЕЧЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПО УСЛОВИЯМ ДОПУСТИМОЙ ЖЕСТКОСТИ

Известны различные способы учета условий допустимой жесткости в задачах оптимизации шарнирно-стержневых систем. В работах [1,2,7] они учитываются совместно с ограничениями на напряжения, и задача решается методами математического программирования [1,2] или строится итерационная процедура решения задачи, основанная на необходимых условиях его (решения) оптимальности [7]. Такой подход не оправдан в тех случаях, когда в оптимальном решении ограничения на перемещения неактивны, так как излишне усложняется поиск решения.

При поэтапном решении задач оптимизации на ранних этапах обычно учитываются только ограничения, связанные с напряжениями, а затем, если ограничения на перемещения оказываются нарушенными, выполняется оптимальная корректировка полученного ранее решения. Кроме того, решение задачи оптимального удовлетворения ограничений на перемещения имеет самостоятельное значение, например при оптимизации статически определимых систем.

Решение задачи оптимального удовлетворения условий допустимой жесткости в работе [3] получено, исходя из потенциальной энергии деформации упругой системы, и развито в [4]. В работе [8] выведены корректирующие множители, отражающие вклад групп элементов в нарушенные ограничения на перемещения. Оптимальное удовлетворение условий допустимой жесткости в статически определимых фермах в работе [5] осуществляется методом линейного программирования, для чего нелинейные ограничения на перемещения линеаризуются. В работе [6] эта же задача решается методом неопределенных множителей Лагранжа.