

## О ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ПРОКТОРА

Одним из основоположников теории расчета балок, лежащих на упругом основании (без гипотезы Винклера), является Г.Э.Проктор [1]. Он предложил заменить гипотезу прямой пропорциональности Винклера на интегральную зависимость между нагрузкой на основание и его осадкой. Кроме того, при изгибе балок на упругом основании он впервые обратил внимание на необходимость учета деформируемости балки по толщине наравне с осадкой основания. Им рассмотрен изгиб балки с учетом смятия нижней кромки на упругом основании под действием сосредоточенной силы, приложенной в центре [2]. Решение этой задачи было сведено Проктором к решению интегродифференциального уравнения относительно прогиба средней оси балки. Искомая функция представлялась в виде ряда по специально построенным полиномам, однако этот метод оказался громоздким и не давал желаемой точности.

В данной работе рассматривается задача изгиба балки под действием распределенной нагрузки с учетом смятия балки. В отличие от Г.Э.Проктора здесь смятие учитывается в зависимости от действия внешней нагрузки и реакции отпора основания. Получена приближенная формула, учитывающая величину укорочения балки по толщине. Выведено интегральное уравнение изгиба балки с учетом ее смятия по толщине на упругом основании и получено численное решение этого уравнения.

Рассмотрим на границе полупространства прямоугольную площадку с размерами  $2a$  и  $2b$  ( $b \ll a$ ), на которой распределена сплошная нагрузка  $p_1(u, v)$ . Так как  $b$  значительно меньше  $a$ , то будем считать, что  $p_1$  зависит только от одной координаты  $u$ . Зависимость между осадкой граничных точек плоскости полупространства и приложенной нагрузкой примем по теории упругого полупространства. Тогда в нашем случае будем иметь

$$w = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} \iint_{-a-b}^{a+b} \frac{p_1(u) dudv}{\sqrt{(\xi - u)^2 + (\eta - v)^2}}. \quad (1)$$

Введем новые переменные интегрирования следующим образом:

$$x = \frac{\xi}{a}; \quad y = \frac{\eta}{b}; \quad t = \frac{u}{a}; \quad s = \frac{v}{b}; \quad \delta = \frac{b}{a}. \quad (2)$$

Проинтегрировав выражение (1) по  $s$ , получим

$$w = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} a \int_{-1}^1 p(t) \left[ \operatorname{Arsh} \frac{\delta(y+1)}{|x-t|} - \operatorname{Arsh} \frac{\delta(y-1)}{|x-t|} \right] dt.$$

Ввиду того что  $b \ll a$ , будем считать: изгиб по направлению оси  $y$  отсутствует и в силу этого положим  $y = 0$ . Тогда

$$w = \frac{2a(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \int_{-1}^1 p(t) \operatorname{Arsh} \frac{\delta}{|x-t|} dt \quad (3)$$

Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения высотой  $2h$  и прямоугольной подошвой  $2a \cdot 2b$ , находящуюся в равновесии под действием нормальных нагрузок  $p(x, y)$  и  $q(x, y)$ , приложенных к плоскостям  $z = \pm h$ . Для определения укорочения балки необходимо определить перемещения и напряжения вдоль оси  $z$ . Для определения  $\sigma_z$  воспользуемся уравнением

$$\Delta^2 \sigma_z = 0 \quad (4)$$

и условиями на границе

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 && \text{при } z = \pm h; \\ \sigma_z &= -p(x, y) && \text{при } z = h; \\ \sigma_z &= -q(x, y) && \text{при } z = -h. \end{aligned} \quad (5)$$

Следуя [3], можно получить такое приближенное выражение для  $\sigma_z$ :

$$\begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{q(x, y)}{4} \left( 2 - 3 \frac{z}{h} + \frac{z^3}{h^3} \right) - \frac{p(x, y)}{4} \left( 2 + 3 \frac{z}{h} - \frac{z^3}{h^3} \right) + \\ &+ \frac{h^2}{40} \left( \frac{z}{h} - 2 \frac{z^3}{h^3} + \frac{z^5}{h^5} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) [q(x, y) + p(x, y)] , \end{aligned} \quad (6)$$

удовлетворяющее условиям (5). Эта формула имеет точность  $O\left(\frac{h^4}{a}\right)$ . Смятие балки определяется как суммарное перемещение

ее точек по высоте. Предположим, что влияние касательных напряжений на нормальное перемещение мало и перемещения происходят только в вертикальном направлении, горизонтальные перемещения отсутствуют. Тогда из соотношений между компонентами напряжений и деформаций имеем

$$w_{\text{см}} = \left| \int_{-h}^h \epsilon_z dz \right| = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \left| \int_{-h}^h \sigma_z dz \right|.$$

Подставляя сюда формулу (6), получим

$$w_{\text{см}} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)h}{E(1-\nu)} [p(x,y) + q(x,y)]. \quad (7)$$

Изогнутая ось балки, с одной стороны, определяется из известного уравнения

$$\frac{EI}{a^4} \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) - p(x). \quad (8)$$

С другой стороны, изогнутая ось балки равна осадке основания плюс половина величины, на которую сжалась балка под действием приложенных нагрузок

$$w = \frac{2(1-\nu_0^2)a}{\pi E_0} \int_{-1}^1 p(t) \operatorname{Arsh} \frac{\delta}{|x-t|} dt + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)h}{2E(1-\nu)} [p(x) + q(x)]. \quad (9)$$

Для определения постоянных интегрирования к системе уравнений (8), (9) необходимо присоединить граничные условия и условия равновесия:

$$w''(x) \Big|_{x=\pm 1} = w'''(x) \Big|_{x=\pm 1} = 0; \quad (10)$$

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = \int_{-1}^1 q(x) dx; \quad (11)$$

$$\int_{-1}^1 xp(x) dx = \int_{-1}^1 xq(x) dx. \quad (12)$$

Проинтегрируем (8) с учетом (10) и подставим в (9). После умножения полученного при этом равенства на  $\lambda = \frac{2E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)a}$  придем к такому интегральному уравнению

$$ap(x) + \int_{-1}^1 K(x,t) p(t) dt = f(x). \quad (13)$$

где

$$K(x,t) = \beta \operatorname{Arsh} \frac{\delta}{|x-t|} + \gamma |x-t|^3;$$

$$f(x) = \lambda (C_0 + C_1 x) - aq(x) + \gamma \int_{-1}^1 |x-t|^3 q(t) dt;$$

$$a = \frac{h}{a}; \quad \beta = \frac{4(1-\nu_0^2)R(1-\nu)}{\pi E_0(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \gamma = \frac{a^3(1-\nu)}{6l(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Постоянные  $C_0$  и  $C_1$  определяются из условий (11) и (12). Будём искать решение уравнения (13) в виде [4]:

$$p(x) = \sum_{k=1}^N d_k \varphi_k(x), \quad (14)$$

где

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{k-1}}{h_1}; & x_{k-1} \leq x \leq x_k; \\ \frac{x_{k+1}-x}{h_1}; & x_k \leq x \leq x_{k+1}; \\ 0 & x < x_{k-1} \text{ или } x_k < x; \end{cases} \quad h_1 = x_k - x_{k-1}.$$

Подставив (14) в (11)–(13), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $d_k$  и постоянных интегрирования  $C_0$  и  $C_1$ .

В качестве примера была взята балка со следующими характеристиками:  $a = 2$  м;  $h = 0,5$  м;  $b = 0,4$  м;  $E = 2 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>;

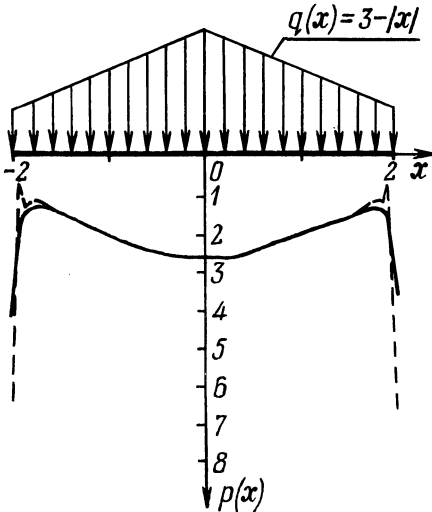


Рис. 1.

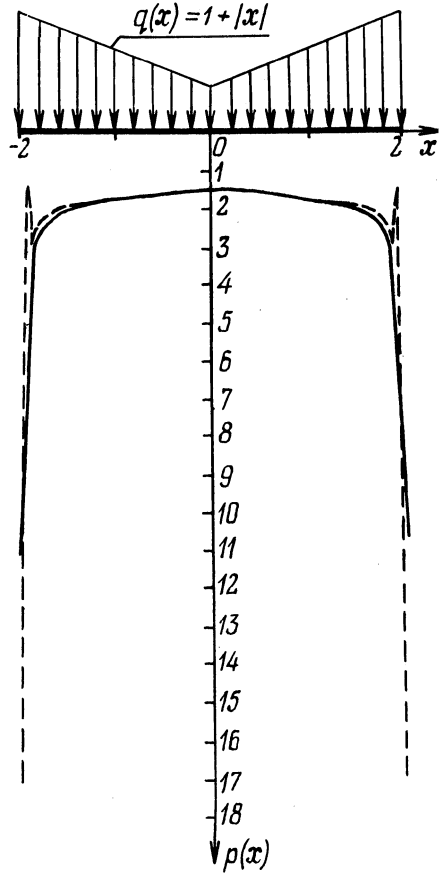


Рис. 2.

$\nu = 0,16667$ . Расчеты показали, что учет смятия приводит к построению устойчивых численных алгоритмов решения соответствующих интегральных уравнений задачи, причем параметр регуляризации имеет определенный механический смысл. На рис. 1,2 представлены некоторые решения рассматриваемой задачи при соотношении модулей упругости  $\frac{E}{E_0} = 10$ . Сплошной линией дано решение с учетом смятия, штриховой — без учета смятия.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К и ш к и н Б.П. О научной и педагогической деятельности профессора Г.Э.Проктора. — В сб.: Проблемы истории математики и механики. М.: Изд-во МГУ, 1975, вып. 2, с. 79—82. 2. Ку з н е ц о в В.И. Упругое основание. — М.: Госиздлит. по строит. и архит., 1952, с. 46—51. 3. М у ш т а р и Х.М. Теория изгиба плит средней толщины. — Изв. АН СССР ОТН. Механика и машиностроение, 1959, № 2, с. 107—113. 4. Г а б д у л х а е в Б.Г. Об одном прямом методе решения интегральных уравнений. — Изв. вузов. Математика, 1965, № 3, с. 52—60.

УДК 539.3

Н.Я.БОЙКО, ассистент (БПИ)

### СЖАТИЕ УПРУГОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ТРЕУГОЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ

Рассмотрим задачу статики для упругого прямоугольного параллелепипеда при следующих граничных условиях (рис. 1) :

$$\text{при } z = \pm \frac{h}{2} \quad w = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0; \quad (1)$$

$$\text{при } y = + \frac{b}{2} \quad \sigma_y = Y_y^+; \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0; \quad (2)$$

$$\text{при } y = - \frac{b}{2} \quad \sigma_y = Y_y^-; \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0; \quad (3)$$

$$\text{при } x = \pm \frac{a}{2} \quad \sigma_x = \tau_{yx} = \tau_{zx} = 0, \quad (4)$$

где

$$Y_y^+ = \left( \frac{2|z|}{h} - 1 \right) q_{\max}; \quad (5)$$

$$Y_y^- = - \left( \frac{2|z|}{h} - 1 \right) q_{\max}; \quad (6)$$