УДК 539.4 + 539.375

В.А.ИБРАГИМОВ, докт.физ.-мат.наук (БПИ)

О НЕКОТОРЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ ИССЛЕДОВАНИЙ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ

Предмет механики разрушения в широком понимании этого термина не нов, вопросы прогнозирования прочности конструкций в течение всего периода развития технической цивилизации оставались объектом внимания как естествоиспытателей, так и специалистов по проектированию и эксплуатации аппаратов и сооружений самого разнообразного назначения. Однако степень учета и использования запасов несущей способности конструкций на различных этапах являлась далеко не одинаковой. В ранних исследованиях, восходящих еще к Кулону, Сен-Венану, Мору и положивших начало классическим теориям прочности, принималось, что разрушение подвергнутого некоторой системе нагрузок тела происходит, как только в некоторой его точке будет достигнуто критическое значение некоторой критериальной комбинации термомеханических характеристик (напряжений σ_{ij}, деформаций ϵ_{ij}, температуры T) и времени t.

Конкретными вариантами критериев в разных случаях являются наибольшее главное удлинение или напряжение, главное касательное напряжение, энергия формоизменения, условия трения со сцеплением; в их число можно включить также ограничения геометрической изменяемости, как, например, в теории устойчивости упругих систем или достижение предельного равновесия жесткого идеально пластического тела, если отнести состояние объекта к пространству обобщенных усилий и перемещений. Основным звеном прочностного расчета при этом является отыскание полей тензора напряжений и вектора перемещений или их скоростей в рамках соответствующей краевой задачи с выбранной реологической моделью тела и заданными внешними параметрами, тогда как детали процесса разрушения считаются несущественными и исключаются из рассмотрения.

Такой подход, предполагающий, что тело является бездефектным, а потеря несущей способности происходит в узкой области изменения внешних параметров (с феноменологической точки зрения, мгновенно) является удовлетворительным далеко не всегда, на что указывают имеющиеся экспериментальные данные и случаи разрушения конструкций при напряжениях ниже технического предела прочности [1]. С другой стороны, достижение критического уровня усилий и наступление локального разрушения в некоторой точке тела отнюдь не обязательно приводит к разрушению тела в целом, поэтому привлечение в этих случаях классических теорий предопределяет недоиспользование запасов прочности и находится в противоречии с основной тенденцией современного машиностроения — резкого уменьшения веса и габаритов конструкций.

Современное направление в теории прочности, введенное Гриффитсом [2—4] и получившее название "механика разрушения", основывается на изучении процесса разрушения тела, наделенного разрывом сплошности — трещиной. Размер последней считается известным и превышающим на несколько порядков характерный параметр структуры материала (например, размер зерна поликристаллического агрегата), что позволяет использовать в задачах о трещинах феноменологические теории (упругости, пластичности, вязкоупругости и др.), развитые на основе концепции сплошной среды.

Постановка задачи о прочности в этом случае предполагает прослеживание истории напряженно-деформированного состояния тела с трещиной на всех этапах, включая достижение предельного равновесия (страгивания) трещины и ее докритического развития вплоть до достижения стадии неустойчивого роста и полного разрушения тела.

Характерной чертой решения этих задач является сингулярность напряжений* и деформаций не кончике разреза, моделирующего трещину, что исключает обычные критерии прочности как дополнительные условия для определения момента страгивания трещины. Поэтому предложенный в [2] критерий имеет интегральный характер и основывается на равенстве изменения полной энергии упругого тела ΔW, высвобождаемой при продвижении трещины и работы $G\Delta S$, необходимой для образования ее новой поверхности ΔS

$$\Delta W = G\Delta S. \qquad (1)$$

Величина G имеет смысл удвоенной поверхностной энергии 2γ упругого тела и является константой материала.

К числу недостатков энергетического критерия (1) относится его неудобство в вычислительном аспекте, связанное с трудностями определения величины $\Delta W/\Delta S$ для тел с усложненной геометрией границы. Этот недостаток был в значительной мере устранен Ирвином [5], показавшим, что вследствие локального характера разрушения хрупкого тела скорость высвобождения энергии $\Delta W/\Delta S$ зависит лишь от коэффициентов интенсивности напряжений K_I, K_{II}, K_{III}, характеризующих сингулярности для основных

* Для некоторых определяющих соотношений (например, идеальной пластичности) напряжения могут оставаться ограниченными.

типов напряженного состояния около кончика трещины. Критерий разрушения, называемый при этом силовым, принимает вид

$$f\,(K_I, K_{II}, K_{III}) = 0, \tag{2}$$

где f является квадратичной функцией своих аргументов или, в более общем случае, определяется экспериментально.

Другим принципиальным ограничением критерия (1) является предположение о линейно-упругой деформируемости среды, приемлемое лишь для хрупких тел (стекла, графиты и т.п.); в то же время для типичных конструкционных материалов наличие жесткой концентрации напряжений в концевой области трещины приводит к появлению нелинейных эффектов, в первую очередь, пластичности.

Первая попытка их учета, предпринятая в [5, 6], состояла в модификации критерия (1) посредством введения удельной работы разрушения G_*, обусловленной энергозатратами на пластичность при разделении материала. Пластическая зона перед кончиком считается малой в сравнении с длиной трещины l и другими характерными параметрами L геометрии тела с трещиной, поэтому сохраняет смысл и силовой критерий (2); при вычислении коэффициентов интенсивности K в рамках обычного упругого анализа длину трещины l следует увеличить на величину, равную половине диаметра d пластической зоны ("поправка на пластичность"). Для каждого из основных типов состояний (нормального отрыва, продольного или поперечного сдвигов) соотношение (2) запишется

$$K = K_*. \tag{3}$$

Вязкость разрушения K_* определяется обычно опытным путем для образца с усталостной трещиной регламентированных размеров.

Указанный подход (именуемый иногда концепцией квазихрупкого разрушения) получил распространение в расчетах на прочность крупногабаритных конструкций и положен в основу ряда проектов отечественных и зарубежных стандартов. Не останавливаясь на перечислении результатов экспериментальной проверки и уточнения границ применимости критерия [1, 21] и методов вычисления коэффициентов интенсивности, которые с достаточной полнотой отражены в имеющихся монографиях (например, [7-9]) и периодической литературе (см., напр., обзор [10]) отметим некоторые, получившие развитие в последние годы направления, связанные с обобщением концепции квазихрупкого разрушения.

Если пластическая зона около кончика трещины не мала, понятие коэффициентов интенсивности напряжений и критерий (2),

(3) утрачивают смысл. Тем не менее при монотонном нагружении нелинейно упрочняющегося тела решение сингулярно по напряжениям [7, 11-16]

$$\sigma_{ij} \sim \frac{k}{r^n} \sigma^o_{ij}(\varphi), \ r \to 0, \qquad (4)$$

(σ^o_{ij} — ограниченные при $r \to 0$ функции полярного угла φ в плоскости, нормальной к кромке трещины; n — показатель особенности, зависящий от параметра нелинейности диаграммы $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to \infty$). Коэффициент k сверхтонкой структуры-асимптотического члена (4) разложения поля σ_{ij} при $\rho \ll r \ll d, L$ (ρ — радиус кривизны или раскрытие кончика трещины) определяет согласно [17] критерий локального разрушения, аналогичный (3)

$$k = k_* . \qquad (5)$$

При отсутствии временных эффектов к виду (5) приводятся и некоторые другие локальные критерии — предельной деформации γ_s на структурном расстоянии ρ_s Макклинтока, концепция COD Уэллса критического раскрытия v_* конца трещины [18], не связанные с представлением о сверхтонкой структуре. Постоянная k_* интерпретируется при этом в терминах γ_s, ρ_s или v_* соответственно.

Критерий (5), как и (3), не позволяет,однако, описать этап устойчивого докритического роста трещины, наблюдаемый в опытах с тонкими пластинами из упругопластических материалов [7, 8], поэтому естественно считать его условием предельного равновесия тела с трещиной.

Имеется ряд полуэмпирических попыток описания участка докритического подрастания трещины (изложенных, напр., в [8]), однако необходимость построения рациональной механики пластического разрушения стимулировала развитие иных методов, базирующихся на детальном исследовании эффектов пластичности в концевых областях растущей трещины и принципах общефизического характера, в первую очередь термодинамических.

В [7] была сформулирована общая теория особенностей,допускающих энергетическое истолкование, в рамках которой поток энергии в кончик растущей трещины определяется с помощью тензора энергии-импульса в виде

$$\Gamma = \oint_C [(U + \frac{1}{2} \rho \dot{l}^2 u_{i,x} u_{i,x} - H) n_x - (\sigma_{ij} u_{i,x} + q_{i,x}) n_j] \, ds. \qquad (6)$$

Функционал (6) вычисляется на заданном распределении σ_{ij}, u_i, q_i по любому малому контуру C, лежащему в плоскости нормального сечения трещины и окружающему ее кончик (U —удельная внутренняя энергия; n_j, q_j — компоненты внешней нормали и вектора потока тепла на C; ρ — плотность материала, $\dot{l} = \dot{l}(t)$ — скорость распространения трещины).

Почти одновременно и независимо Г-интеграл (6) рассматривался Райсом [19], огранчившимся случаем статики и изотермического деформирования нелинейно упругой среды, и (применительно к динамике дислокаций и точечных дефектов) в работах Сандерса, Эшелби, Аткинсона и других авторов [20].

Условие подрастания трещины в теории Черепанова является непосредственным следствием первого начала термодинамики и имеет вид

$$\Gamma = \Gamma_*. \tag{7}$$

Величина Γ_*, равная удвоенной удельной работе разрушения $2\gamma_*$, считается в условиях квазихрупкого разрушения константой; в [7] приведены примеры построения в этом приближении докритической диаграммы при плоском напряженном состоянии упругого идеально-пластического тела в рамках модели Дагдейла.

Ясная физическая интерпретация и удобство в расчетном соотношении критерия (7) сделали его, по-видимому, основным объектом теоретических и экспериментальных исследований последних лет в нелинейной механике разрушения, на что указывает, в частности, количество соответствующих сообщений, представленных на IV Международном конгрессе по разрушению (Канада, 1977 г.) [10, 21].

Одним из принципиальных вопросов, связанных с обоснованием Г-критерия в упругопластической теории трещин, является его согласование с моделями структуры кончика трещины. Согласно [7], развитие трещины при наличии сопротивления материала разрушению ($\Gamma_* > 0$) может описываться лишь классом решений упругопластической задачи, обеспечивающим асимптотику подынтегральных членов в (6) порядка $1/r$ при $r \to 0$. Если, в частности, влияние термодинамических членов в (6) невелико, указанное требование эквивалентно условию на поля напряжений и деформаций

$$\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij} \sim 1/r,\ r \to 0. \tag{8}$$

Для нелинейно упругих тел (или упругопластических тел с определяющими соотношениями типа деформационной теории без разгрузки) условие ненулевого притока энергии в кончик трещины (8) выполняется. В то же время, как показывает решение задачи о квазистатическом стационарном распространении трещины при продольном сдвиге идеально пластического материала [22], в материалах, для которых упругая разгрузка не следует тому же правилу, что и активное нагружение, особенность произведения главных членов σ_{ij}, ε_{ij} оказывается слабее, чем в (8). Последнее означает, что трещина в указанном случае распространяться не может. Универсальность этого вывода была установлена в [23-26] для широкого круга определяющих уравнений пластичности, режимов роста и типов напряженных состояний. Ранее, применительно к некоторым типам наследственных (вязкоупругих) сред, аналогичное заключение было сделано авторами работы [27] (см. также [6]).

Возможные способы построения решений задач о растущей трещине, согласующихся с критерием (7), обсуждались в [27-29].

В [27] была введена классификация континуальных моделей кончика трещины, связанная с возможными размерами Δ—зона разделения материала в кончике. Если величина Δ равна нулю, разрушение считается хрупким; в этом приближении отыскиваются решения в линейной механике разрушения. Для упругопластичных сред такое приближение,как это следует из указанных выше результатов,оказывается недостаточным и должно быть заменено условием $\Delta \neq 0$ (неидеально хрупкий тип разрушения). Величина потока энергии в кончик трещины, соответствующая ненулевому значению удвоенной удельной работы разрушения Γ_*, достигается в этом случае, как показывает, например, полученная в [29] оценка, и для слабых особенностей σ_{ij}, ε_{ij}, и, в частности, для ограниченных их значений при $r \to 0$.

Аналогичные представления были развиты ранее из иных соображений в линейно упругих моделях Леонова—Панасюка [30], Баренблатта [31]. В рамках первой их них в статье [27] исследовалась кинетика трещины в вязкоупругой среде Кельвина. Некоторые численные оценки величины Δ применительно к пластичности содержатся в [28].

Характерной особенностью постановок задач при неидеально хрупком разрушении является необходимость фиксации геометрии зоны ослабленных связей в материале и граничных условий на ее берегах. Единственным ограничением произвола в их задании является упомянутое условие $\Gamma > 0$, имеющее, очевидно, лишь интегральный характер, поэтому соответствующее решение упругопластической задачи неединственно. На это обстоятельство указывает уже пример продольного сдвига в упругой идеально пластической среде, обладающего двумя полями σ_{ij}, u_i — непрерывным относительно u_i и разрывным решением, полученным Б.В.Костровым и Л.В.Никитиным. Как отмечалось в [32], теорема единственности [33] справедлива лишь для решений, не обладающих сильными разрывами. Однако, если геометрия зоны и дополнительное условие на ней известны, решение задачи о трещине будет единственным. Примеры таких решений применительно к более общему случаю упрочняющейся среды приведены в [34], где предполагалось,что зона ослабленных связей представляет собой отрезок L на продолжении трещины, а дополнительное условие состояло в задании интенсивности деформаций сдвига $\gamma = \gamma_c$ ($\gamma^2 = \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2$) на берегах L. Указанное условие является единственным тензорно инвариантным соотношением при продольном сдвиге и естественным обобщением классической теории прочности по деформациям, с одной стороны, и известной ДБКС-модели [35], — с другой.

Имеется большое число физических аргументов в пользу представления о неидеально хрупком разрушении [1, 21], однако, неясность количественных оценок для дислокационных механизмов образования и роста трещин сдерживала до настоящего времени развитие указанной феноменологической трактовки в отношении задач с более сложным кинематическим состоянием, в первую очередь, плоскодеформированным.

Возможности описания роста трещины в рамках идеально хрупкой схемы разрушения, в частности, с учетом тепловых эффектов, рассматривались в [25,29,36,37].

В настоящее время получили развитие и иные способы построения критериев предельного равновесия трещины и докритических диаграмм разрушения, не связанные с анализом энергетического баланса для тела с трещиной и опирающиеся, по преимуществу, на упоминавшуюся выше СОД-концепцию предельного раскрытия v_* трещины. С перечнем работ, посвященных этому направлению, можно ознакомиться, например, в [1,6,7] и последующих публикациях.

В заключение укажем на еще один класс задач, связанных с исследованием в концевой области трещины нелинейных эффектов иного типа — геометрических. Решения линейной механики разрушения и упоминавшиеся выше их обобщения для физически нелинейных сред получены в рамках линеаризации, предполагающей отбрасывание квадратов градиента перемещений в соотношениях Коши для деформаций и перенесение краевых условий с берегов полости трещины на берега ее начальной конфигурации — разреза. Учет конечности деформаций и формы трещины должны приводить к появлению на расстояниях r порядка радиуса кривизны ρ конца трещины особенностей σ_{ij}, отличных от $1/\sqrt{r}$. Асимптотика $\sigma_{ij} \sim 1/\sqrt{r}$ реализуется при этом на расстояниях r порядка $\rho \ll r \ll l$ и соответствует линеаризованному приближению.

Фактическое построение соответствующего решения уже в асимптотической постановке наталкивается, наряду с аппаратными трудностями, на проблемы принципиального характера (см., например, [7]) и до настоящего времени не осуществлено. Последнее, однако, является необходимым по крайней мере в качестве логического основания энергетической и силовой концепцией линейной механики разрушения и дальнейшего уточнения других критериев разрушения (Макклинтока, Уэллса и др.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Разрушение /Под ред. Г.Либовиц. — М.: Мир, т. I, 1973. -615 с. 2. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1979, —744 с. 3. Griffith A.A. The theory of rupture. Proceed. 1-st Intern. — Congr. Appl. Mech., Delft, 1924. p.p. 55–63. 4. Griffith A.A. Ihe fenomenon of rupture and flow in solids. – Phil. Trans. Roy. Soc.ser. A., vol. 221, 1920, p.p. 163–198. 5. Irwin G.R. Fracture dynamics. – Fracture of metals. ASM, Cleveland, 1948, p.p. 147–166. 6. Orowan E.O. Fundamentals of brittle behavior of metals. – Fatigue and Fracture of metals., N.–Y., Wiley, 1950, p.p. 139–167. 7. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. — М.: Наука, 1974. — 361 с. 8. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения.—М.: Наука, 1974. — 416 с. 9. Морозов Е.М. Никишков Г.П. Метод конечных элементов в механике разрушения. — М.: Наука, 1980. — 254 с. 10. Гольдштейн Р.В. Некоторые вопросы механики разрушения крупногабаритных конструкций. — В сб.: Механика разрушения. Разрушение конструкций. — М.: Мир, 1980, с. 228—255. 11. Rice I.R. Stresses due to a sharp notch in a workhardening elastic-plastic material loaded by longitudinal shear. Trans. ASME, ser. E , Journ. Appl. Mech. June, 1967, p.p. 287–298. 12. Rice J .R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-low hardening material. Journ. Mech. Phys. Solids, No 1, 1968, vol. 16. p.p. 1–12. 13. Hutchinson J.W. Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material. – Journ. Mech. Phys. Solids, No 1, 1968, vol. 16, p.p. 13–31. 14. Hutchinson J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip. – Journ. Mech. Phys. Solids, 1968, vol. 16, p.p. 32–40. 15. Ибрагимов В.А. Об одном представлении решений задачи антиплоского деформирования физически нелинейной упругой среды. — ПММ, 1977, т. 41, с. 699—703. 16. Ибрагимов В.А. Об одном классе решений упругопластической задачи в условиях антиплоского состояния. — Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 3, с. 85—91. 17. Черепанов Г.П. Некоторые основные вопросы линейной механики разрушений. — Проблемы прочности, 1971, № 2, с. 70—73. 18. Макклинток Ф., Аргон А. Деформация и разрушение материалов. — М.: Мир, 1970, 278 с. 19. Rice J.R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. – Trans. ASME,ser. E, Journ. Appl. Mech, 1968, vol. 35., p.p. 379–386. 20. Билби Б. Разрушение. — В сб.: Механика разрушения. Разрушение конструкций. М.: Мир, 1980, с. 204—227. 21. Ирвин Д., Парис П. Анализ упругопластического состояния в вершине трещины при помощи R-кривых. — В сб.: Механика разрушения. Разрушение материалов. — М.: Мир, 1979, с. 9—18. 22. Chitaley A.D., Mc. Clintock F.A. Elastic-plastic mechanics of steady crack growth under anti-plane shear. Journ. Mech. – Phys. Solids, 1971, vol. 19, p.p. 147–163. 23. Слепян Л.И. Деформация у края растущей трещины. — Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4, с. 139—148. 24. Слепян Л.И. Растущая трещина при плоской деформации упругопластического тела. — Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 1, с. 57—67. 25. Ибрагимов В.А. Напряженно-деформированное состояние вблизи конца растущей трещины в упругопластической среде. — ПММ, 1976, т. 40, вып. 2, с. 337—345. 26. Ибрагимов В.А., Клюшников В.Д. О влиянии деформационной анизотропии на состояние в окрестности конца трещины. — ПММ, 1977, т. 41, вып. 5, с. 943—948. 27. Костров Б.В., Никитин Л.В Флитман Л.М. Механика хрупкого разрушения. — Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 3, с. 112—125. 28. Кфури А., Райс Д. Скорость высвобождения энергии деформации трещины при увеличении ее размера на конечную величину. — В сб.: Механика разрушения. Разрушение материалов. — М.: Мир, 1979, с. 19—39. 29. Ибрагимов В.А., Клюшников В.Д. О некоторых характерных особенностях упругопластических решений в теории трещин. — Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5, с. 122—131. 30. Леонов М.Я., Панасюк В.В. Розвиток найдрибнийших трiщин в твердому тiл: .— Прик-

ладная механика, т. 5, вып. 4, 1959, с. 391—401. 31. Баренблатт Г.И. О некоторых общих представлениях математической теории хрупкого разрушения. — ПММ, 1964, т. 28, с. 630—643. 32. Черепанов Г.П. О проблеме неединственности в теории пластичности. — ДАН СССР, 1974, т. 218, № 4, с. 779—782. 33. Ивлев Д.Д., Быковцев Г.Н. Теория упрочняющегося пластического тела. — М.: Наука, 1971. — 231 с. 34. Ибрагимов В.А. Некоторые задачи о распространении трещин в упругопластических средах. — Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1978. — 28 с. 35. Черепанов Г.П. Упругопластическая задача. — Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 2, с. 82—91. 36. Морозов Е.М., Никишков Г.П. Погрешности линейного подхода при определении нагрузки старта трещины в упругопластических телах. — Физико-химическая механика материалов, 1975, № 3, с. 95—98. 37. Морозов Е.М. Никишков Г.П. Нестационарная упругопластическая задача о начале движения трещины в условиях изотермического процесса. — Физико-химическая механика материалов, 1978, № 4, с. 115—118.

УДК 539.3+615.471

А.Е.КРУШЕВСКИЙ, канд.техн.наук (БПИ)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ ПЕРИОДОНТА КАК ОБОЛОЧКИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ДВУМЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ДВУПОЛОСТНЫМИ ГИПЕРБОЛОИДАМИ

В стоматологической практике при конструировании различных протезов необходимо знать напряжения, которые испытывает периодонт, т.е. тонкая упругая оболочка, находящаяся между корнем зуба и костной тканью челюсти. В этой оболочке сосредоточены нервные окончания, которые при действии на зуб внешних сил вызывают болевые ощущения.

Впервые расчетная модель периодонта, ограниченного двумя круговыми конусами, была построена Г.П.Сосниным на основе методов сопротивления материалов. Однако этот метод не позволил перейти к расчету других, более совершенных моделей. В 1974 г. стоматологи Г.П.Соснин и Л.С.Величко предложили автору данной статьи решить задачу для формы в виде эллиптического конуса. Поставленная задача решена автором при достаточно общих предположениях относительно формы поверхностей периодонта и получены формулы для периодонта в виде эллиптического конуса [1]. При этом был предложен новый аналитический метод, при котором заранее выполняется условие неподвижности наружной поверхности периодонта и условие жесткой связи внутренней поверхности с корнем зуба, рассматриваемого как абсолютно твердое тело. Модель эллиптического конуса позволила дать более правильную картину распределения напряжений, показала снижение нормальных напряжений за счет возникновения касательных напряжений вдоль образующей и направляющей конуса, объяснить целый ряд фактов, как, например, меньшую сопротивляемость зуба в боковом направлении по сравнению с фрон-