

венных задач теории упругости. — Проблемы прочности, 1980, № 2, с. 73–76. 4. К и р и ч е в с к и й В.В. Интегрирование по объему в методе конечных элементов. — В кн.: Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев: Будівельник, 1974, вып. 24, с. 42–46. 5. К и с л о о к и й В.Н., С а х а р о в А.С. Проблемно-ориентированный комплекс прочностных расчетов пространственных конструкций. — В кн.: Организация и методика строительного проектирования с применением вычислительной и организационной техники. М.: Госстрой СССР, 1974, вып. 2, сер. 10, с. 1–4. 6. Р о з и к А.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. — М.: Стройиздат, 1977. — 129 с.

УДК 539.3

Л.П.КНЯЗЕВА, В.С.РОМАНЧИК,
канд. физ.-мат.наук (БГУ)

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ КУБИЧЕСКИ-АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Задача упругого равновесия кубически-анизотропной среды, имеющей две взаимно ортогональные оси симметрии четвертого порядка, описывается эллиптической системой уравнений [1]

$$C_{44}\Delta u_i + a \frac{\partial e}{\partial x_i} - d \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + X_i = 0, \quad x \in V, \quad i = 1, 3 \quad (1)$$

с граничными условиями относительно перемещений или напряжений:

$$t_i^{(n)} = (C_{12}e - d \frac{\partial u_i}{\partial x_i})n_i + C_{44} \sum_{j=1}^3 (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})n_j.$$

Здесь Δ — оператор Лапласа; $e = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$; X_i — компоненты вектора объемных сил; S — поверхность, ограничивающая область V , занимаемую средой; $a = C_{12} + C_{44}$; $d = C_{12} + 2C_{44} - C_{11}$, C_{11} , C_{12} , C_{44} — модули упругости среды.

Эллиптичность системы (1) вытекает из следующего рассмотрения. Линейный дифференциальный оператор системы (1) может быть записан в виде

$$L_{ik} = \sum_{j,l=1}^3 C_{ijkl} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \quad (2)$$

Здесь

$$C_{ijkl} = C_{12}\delta_{ik}\delta_{jl} + C_{44}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + d\delta_{ijkl},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера; $\delta_{ijkl} = \sum_{n=1}^3 \delta_{in}\delta_{jn}\delta_{kn}\delta_{ln}$.

Характеристическая матрица системы (1) выражается следующим образом:

$$Q_{ik}(\xi) = \sum_{j,l=1}^3 C_{ijkl}\xi_j\xi_l = (C_{44} + d\xi_i^2)\delta_{ik} + a\xi_i\xi_k.$$

Эта квадратичная форма должна быть положительно определенной, так как она совпадает с выражением потенциальной энергии деформации [2].

Отсюда следует эллиптичность системы (1) и ограничения на упругие постоянные: $C_{44} > 0$; $C_{11} - C_{12} > 0$; $C_{11} + 2C_{12} > 0$. Фундаментальным решением $U_{ij}(x-y)$ линейного оператора (2) является решение неоднородного уравнения (1) при $X_i = \delta_{im} \delta(x-y)$:

$$L_{ik}(U_{km}(x-y)) = -\delta_{im}(x-y),$$

где $\delta(x-y)$ – дельта-функция. Таким образом, $U_{ij}(x-y)$ представляет смещение в точке x упругой среды, вызванное единичной сосредоточенной силой, приложенной в точке y в направлении j -й координаты. Оно имеет вид

$$U_{ij}(x-y) = \frac{1}{8\pi^2|x-y|} \oint_{|\xi|=1} P_{ij}(\xi) ds. \quad (3)$$

Интегрирование в (3) производится по единичной окружности в плоскости, перпендикулярной вектору $z = x - y$, с центром в точке x ; $P_{ij}(\xi)$ – матрица, обратная характеристической матрице $Q_{ij}(\xi)$:

$$P_{ij}(\xi) = \frac{\Delta_{ij}(\xi)}{\Delta(\xi)},$$

где $\Delta(\xi)$ – определитель матрицы $Q_{ij}(\xi)$, $\Delta_{ij}(\xi)$ – алгебраическое дополнение элемента $Q_{ij}(\xi)$.

Использование теоремы взаимности и операций предельного перехода на поверхность тела приводит задачу (1) к следующей системе интегральных уравнений:

$$\frac{u_i(x)}{2} + \int_S T_{ij}(x-y)u_j(y)ds = \int_S U_{ij}(x-y)t_j(y)ds \quad (4)$$

относительно u_j и t_j на тех частях границы S , где они неизвестны; $T_{ij}(x-y)$ – результат применения оператора напряжения $t_i^{(n)}$ к фундаментальному решению $U_{ij}(x-y)$, сингулярное решение системы (1)

$$T_{im}(x-y) = \sum_{j,k,l=1}^3 C_{ijkl} \frac{\partial U_{km}(x-y)}{\partial x_l} n_j. \quad (5)$$

Основная трудность, связанная с численным решением (4), заключается в невозможности вычислить контурный интеграл в выражении (3) для фундаментального решения $U_{ij}(x-y)$ один раз и использовать его в дальнейшем для различной ориентации вектора z . С изменением направления вектора z меняется и контур интегрирования. Интеграл в (3) можно преобразовать таким образом, что контур интегрирования станет независимым от ориентации z

Представим вектор z в виде $z = R\rho$, где $R = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2}$; ρ – единичный вектор. Введем сферические координаты для вектора ρ :

$$\rho = (\sin\theta \cos\psi; \sin\theta \sin\psi; \cos\psi),$$

$$\text{где } \theta = \arccos \frac{\rho_3}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2}}; \quad \psi = \arctg \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Компоненты вектора ξ примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \theta \cos \psi; \\ \xi_2 &= -\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \cos \theta \sin \psi; \\ \xi_3 &= \sin \varphi \sin \theta, \end{aligned} \quad (6)$$

где φ — угол в плоскости интегрирования.

Фундаментальное решение $U_{ij}(x-y)$ системы уравнений (1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} U_{ij}(x-y) &= \frac{1}{8\pi^2 R} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\delta_{ij}}{C_{44} + d\xi_i^2(\varphi)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a\xi_i(\varphi)\xi_j(\varphi)}{(C_{44} + d\xi_i^2(\varphi))(C_{44} + d\xi_j^2(\varphi))(1 + \sum_{k=1}^3 \frac{a\xi_k^2(\varphi)}{C_{44} + d\xi_k^2(\varphi)})} \right\} d\varphi, \quad (7) \end{aligned}$$

где $\xi_j(\varphi)$ выражаются по формулам (6).

Интеграл в (7) вычисляется по квадратурным формулам типа Гаусса, так как сингулярное поведение фундаментального решения связано с первым сомножителем в (3). Представление фундаментального решения в виде (7) дает возможность построить решение $T_{ij}(x-y)$ путем дифференцирования под знаком интеграла и избежать численного дифференцирования.

Частные производные фундаментального решения $U_{ij}(x-y)$ после проведения дифференцирования имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{ij}(x-y)}{\partial x_k} &= \frac{x_k - y_k}{8\pi^2 R^3} \int_0^{2\pi} P_{ij}(\varphi) d\varphi - \frac{d}{4\pi^2 R} \int_0^{2\pi} \frac{\xi_i(\varphi)\xi_{i,k}(\varphi)}{C_{44} + d\xi_i^2(\varphi)} P_{ij}(\varphi) d\varphi + \\ &\quad + \frac{a}{4\pi^2 R} \int_0^{2\pi} \frac{\xi_i(\varphi)\xi_j(\varphi)}{(C_{44} + d\xi_i^2(\varphi))(C_{44} + d\xi_j^2(\varphi))(1 + \sum_{k=1}^3 \frac{a\xi_k^2(\varphi)}{C_{44} + d\xi_k^2(\varphi)})} x \\ &\quad \times \sum_{n=1}^3 \frac{\xi_n(\varphi)\xi_{n,k}(\varphi)}{C_{44} + d\xi_n^2(\varphi)} \left(1 - \frac{d\xi_n^2(\varphi)}{C_{44} + d\xi_n^2(\varphi)}\right) d\varphi - \frac{a}{4\pi^2 R} x \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\xi_i(\varphi) \xi_{i,k}(\varphi) + \xi_j(\varphi) \xi_{j,k}(\varphi) - 2d\xi_i(\varphi) \xi_j^2(\varphi) \xi_{j,k}(\varphi) (C_{44} + d\xi_j^2(\varphi))^{-1}}{(C_{44} + d\xi_i^2(\varphi)) (C_{44} + d\xi_j^2(\varphi)) (1 + \sum_{n=1}^3 \frac{a\xi_n^2(\varphi)}{C_{44} + d\xi_n^2(\varphi)})} d\varphi, \quad (8)$$

где $P_{ij}(\varphi)$ – подынтегральное выражение в (7); $\xi_{i,k}$ – производная i -й компоненты вектора ξ в виде (6). Например,

$$\xi_{3,3} = -1/R \sin \varphi \cos \theta \sin \theta.$$

Остальные производные вычисляются аналогично.

Выражение для $T_{ij}(x-y)$ получается подстановкой (8) в (5).

Численные расчеты проводились для веществ с различной степенью проявления анизотропных свойств на ЕС ЭВМ. На рис. 1, а, б приведены результаты расчетов фундаментального решения $U_{ij}(x-y)$ для алюминия ($C_{11} = 1073$; $C_{12} = 609$; $C_{44} = 283$) при $\psi = 0$ и $\psi = 45^\circ$. Вычисленные значения сравнивались с результатами работы [4], использующей разложения в ряды Фурье для вычисления $U_{ij}(x-y)$.

В работе [3] построено приближенное выражение для фундаментального решения разложением (4) в ряд по степеням d и интегрированием членов ряда. На рис. 1, в, г приведены значения для германия ($C_{11} = 1293$; $C_{12} = 485$;

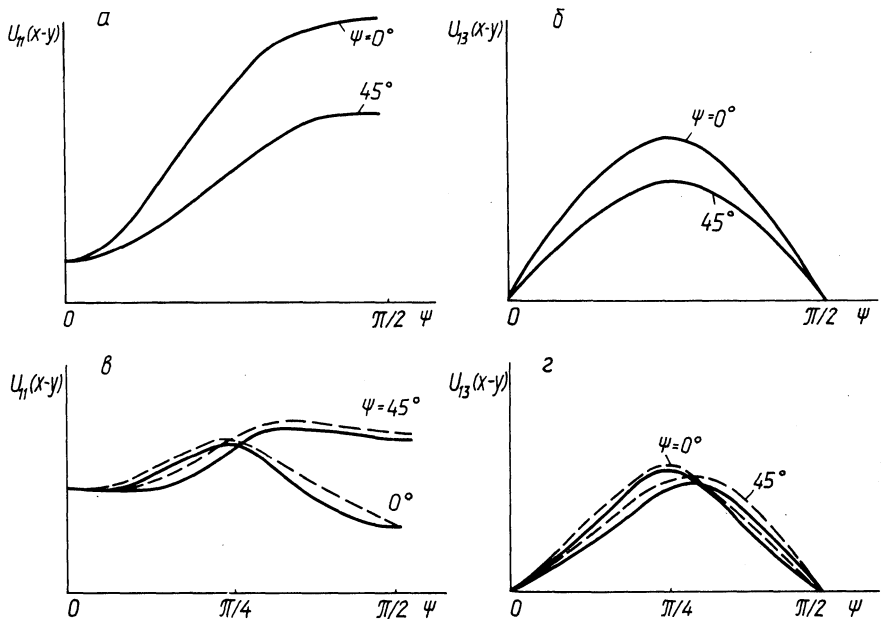


Рис. 1. Компоненты $u_{11}(x-y)$ и $u_{13}(x-y)$ матрицы фундаментальных решений для алюминия (а, б) и для германия (в, г).

$C_{44} = 672$ в ед. 10^{-11} Па) при $\psi = 0$ и $\psi = 45^\circ$, полученные интегрированием выражения (6) (сплошная линия) и вычислением по приближенной формуле из [3] (пунктирная линия).

Для проверки правильности построения решения $T_{ij}(x-y)$ полученные выражения интегрировались по поверхности сферы, содержащей точку приложения силы. Использовалась кубатурная формула со 100 точками на поверхности сферы [5]. Результат вычисления сравнивался со значением равнодействующей силы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л и ф ш и ц И.М., Р о з е н ц в е й г Л.Н. О построении тензора Грина для основного уравнения теории упругости в случае неограниченной упруго-анизотропной среды. — ЖЭТФ, вып. 9, т. 17, 1947, с. 783–789.
2. D e d e r i c h s P.H., L e i b f r i e d G. Elastic Green's Function for Anisotropic Cubic Crystals. — Phys. Review, 1969, v. 188, N 3, p. 1175–1183.
3. V o g e l S.M., R i z z o F.J. An integral equation formulation of three dimensional anisotropic elastostatic boundary value problems. — J. of Elasticity, 1973, v. 3, N 3, p. 203–216.
4. L i e K.-H. C., K o e h l e r J.S. The Elastic Stress Field produced by a Point Force in a Cubic Crystal. — Advances in Physics, 1968, v. 17, N 67, p. 421–478.
5. К р ы л о в В.И. Приближенное вычисление интегралов. — М.: Наука, 1967. — 500 с.

УДК 539.3

Н.Я.БОЙКО (БПИ)

О ХАРАКТЕРЕ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ ПРИ СЖАТИИ ЕГО КЛИНООБРАЗНЫМ ЖЕСТКИМ ШТАМПОМ

В работе [1] получено решение задачи сжатия (рис. 1) упругого прямоугольного параллелепипеда жестким клинообразным штампом при следующих краевых условиях:

$$\text{при } x = \pm \frac{a}{2} \quad \sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0; \quad (1)$$

$$\text{при } y = \pm \frac{b}{2} \quad \tau_{yx} = \tau_{yz} = v = 0; \quad (2)$$

$$\text{при } z = \pm \frac{h}{2} \quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0;$$

$$w = -\frac{h}{2} - \frac{h_0 b_0}{2b} + \frac{2bh_0}{\pi^2(b-b_0)} x$$

$$x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left(\cos \pi k - \cos \frac{\pi k b_0}{b} \right) \cos \frac{2\pi k y}{b} \quad (3)$$

Представляет интерес провести численный анализ напряженного состояния упругого параллелепипеда.