

центрические цилиндрические поверхности. Из закона распределения температур по сечению цилиндра следует

$$\text{grad } T = \frac{T_1 - T_0}{\ln b/a} \cdot \frac{dR}{R^2} . \quad (5)$$

На основании (5) построена графическая зависимость для случаев, когда тепловой поток направлен наружу (рис. 3, а) и вовнутрь (рис. 3, б) [2]. На рис. 4, а, б представлена картина изохром и графическая зависимость

$$n_1 - n_2 = f(R) ,$$

построенная по экспериментальным данным. Здесь n – показатель преломления; $n_1 - n_2$ – разность хода светового луча. Картина полос, по которой строилась данная зависимость, фиксировалась на оптически чувствительном материале ЭД20-М. Цилиндрическая модель, изготовленная из материала ЭД20-М, подвергалась тепловому воздействию постоянной разности температур, которая оставалась неизменной в процессе охлаждения так, что верхний предел охлаждения после окончания эксперимента достигал температуры фиксации [3]. Расчет температурного поля и проведение эксперимента осуществлялись для температур $T_1 - T_0 = 55$ °С и размеров цилиндра $a = 10$ мм; $b = 30$ мм (рис. 3).

Характер приведенных зависимостей позволяет заключить, что оптически чувствительная модель может служить исходным пунктом для построения температурного поля в любой сплошной среде. Это следует из известных законов [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Хауф В., Гриуль У. Оптические методы в теплопередаче. – М.: Мир, 1973, с. 45–50.
2. Жуковский В.С. Основы теории теплопередачи. – Л.: Энергия, 1969, с. 14, 31.
3. Буткевич Н.Н. Исследование напряженного состояния кованых штампов с неоднородным термическим упрочнением: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Минск, 1972. – 62 с.
4. Кирпичев М.В. Теория подобия. – М.: АН СССР, 1953, с. 43–47.

УДК 539.31

В.Н.АПАНОВИЧ, канд.техн.наук,
В.А.ГУГЛЯ (БПИ)

ТОЧНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ ПИРАМИДАЛЬНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Численная реализация метода конечных элементов (МКЭ) для решения трехмерных задач теории упругости связана с преодолением значительных вычислительных проблем. Одной из таких проблем является вычисление коэффициентов матрицы жесткости конечных элементов (КЭ) высоких порядков точности [1–5].

В данной статье выводятся соотношения для точного вычисления коэффициентов матрицы жесткости произвольного пирамидального конечного элемента с полиномиальной аппроксимацией перемещений.

Представим перемещения конечного элемента в виде ряда

$$\vec{U} = \sum_{i=1}^N a_i \vec{\varphi}_i, \quad (1)$$

где a_i — постоянные коэффициенты; $\vec{\varphi}_i$ — базисные функции. Компоненты i -й базисной вектор-функции $\vec{\varphi}_i = \{\varphi_{i,1}; \varphi_{i,2}; \varphi_{i,3}\}$ в представлении (1) являются полиномами трех независимых переменных

$$\varphi_{i,r} = \sum_{\kappa=1}^{\kappa 1} c_{i,r,\kappa} \prod_{l=1}^3 x_l^{p_{i,r,\kappa,l}}, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

где $\kappa 1$ — количество мономов в полиноме; $c_{i,r,\kappa}$ — постоянные коэффициенты; $p_{i,r,\kappa,l}$ — показатели степеней независимых переменных.

Матрица жесткости конечного элемента имеет вид

$$K = \int_V (B)^T D B \, dV, \quad (3)$$

структуры матриц B и D приведены в работе [6].

Подставляя (2) в (3), получим формулу для вычисления коэффициента матрицы жесткости КЭ:

$$K_{m,n} = G \sum_{r=1}^{\kappa 1} \sum_{\kappa=1}^{\kappa 1} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ L_{i,j} C_{n,j,r} C_{m,i,\kappa} P_{m,i,i,r} P_{n,j,j,\kappa} J_1 + \lambda_{ij} \times \right. \\ \left. \times [C_{m,i,r,\kappa} P_{m,i,j,r} (C_{n,i,\kappa} P_{n,i,j,\kappa} J_2 + C_{n,j,\kappa} P_{n,j,i,\kappa} J_1) + \right. \\ \left. + C_{m,j,r} P_{m,j,i,r} (C_{n,i,\kappa} P_{m,i,j,\kappa} J_3 + C_{n,j,\kappa} P_{n,j,i,\kappa} J_4) \right\}; \quad (4)$$

$$m = 1, 2, \dots, N; \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

где

$$J_1 = \int_V \left(\prod_{l=1}^3 x_l^{P_{m,i,e,r} + P_{n,j,e,k} - \delta_{i,l} - \delta_{j,l}} \right) dV; \\ J_2 = \int_V \left(\prod_{l=1}^3 x_l^{P_{m,j,e,r} + P_{n,i,e,k} - \delta_{i,l} - \delta_{j,l}} \right) dV; \\ J_3 = \int_V \left(\prod_{l=1}^3 x_l^{P_{m,j,e,r} + P_{n,i,e,k} - \delta_{i,l} - \delta_{j,l}} \right) dV; \\ J_4 = \int_V \left(\prod_{l=1}^3 x_l^{P_{m,j,e,r} + P_{n,i,e,k} - 2\delta_{i,l}} \right) dV; \\ L_{i,j} = \gamma \delta_{i,j} + \lambda_{i,j} \gamma_2; \quad \gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}; \quad \lambda_{i,j} = \frac{1-\delta_{i,j}}{1+\delta_{i,j}}; \\ \gamma_2 = \gamma - 2. \quad (5)$$

Здесь $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера; G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона. Таким образом, для вычисления коэффициентов $K_{m,n}$ по формуле (4) не-

обходимо предварительно определить интегралы (5) по объему конечного элемента.

Рассмотрим КЭ в виде усеченной пирамиды. Введем локальную систему координат ZOX , связанную с КЭ таким образом, чтобы основание пирамиды ABC было параллельно YOX (рис. 1). Вычислим интегралы (5) от мономов $J_{mnp} = \int_V x^m y^n z^p dV$ по объему пирамиды в локальной системе координат.

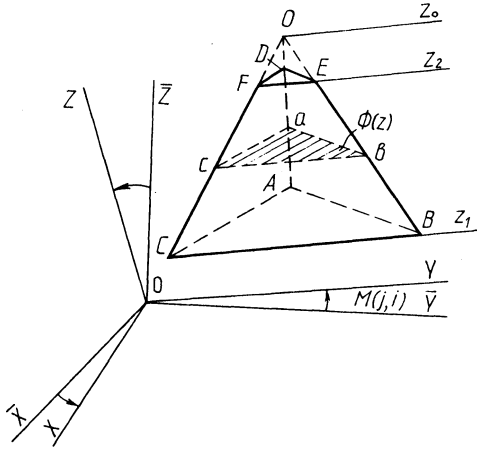


Рис. 1. Конечный элемент в глобальной и локальной системе координат.

Для этого произведем следующее преобразование:

$$J_{mnp} = \int_V x^m y^n z^p dV = \int_{z_1}^{z_2} z^p \Phi(z) dz ;$$

$$\Phi(z) = \int_{x_a}^{x_b} x^m dx \int_{y_{ac}}^{y_{ab}} y^n dy + \int_{x_b}^{x_c} x^m dx \int_{y_{ac}}^{y_{bc}} y^n dy. \quad (6)$$

При этом пределы интегрирования имеют вид

$$x_a = a_1 z + a_2; \quad x_b = b_1 z + b_2; \quad x_c = c_1 z + c_2; \quad (7)$$

$$y_{ab} = \varphi_1 x + \varphi_2 z + \varphi_3; \quad y_{ac} = \eta_1 x + \eta_2 z + \eta_3; \quad y_{bc} = \Psi_1 x + \Psi_2 z + \Psi_3.$$

Константы $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, \varphi_j, \Psi_j, \eta_j, j = 1, 3$ в выражениях (7) характеризуют форму данного КЭ и определяются с использованием зависимостей аналитической геометрии, для чего первоначально определяются координаты точки O' , равные:

$$x_0 = \frac{x_D a_1 - x_A a_2}{a_1 - a_2}; \quad y_0 = \frac{y_D a_1 - y_A a_2}{a_1 - a_2}; \quad z_0 = \frac{z_2 a_1 - z_1 a_2}{a_1 - a_2},$$

где

$$a_1 = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2};$$

$$a_2 = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2 + (z_F - z_E)^2}.$$

После чего, используя свойство подобия поперечных сечений пирамиды abc основанию ABC, имеем:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{x_0 - x_A}{z_0 - z_1}; & b_1 &= \frac{x_0 - x_B}{z_0 - z_1}; & c_1 &= \frac{x_0 - x_C}{z_0 - z_1}; \\ a_2 &= \frac{(x_A - x_0)}{z_0 - z_1} z_0 + x_0; & b_2 &= \frac{(x_B - x_0)}{z_0 - z_1} z_0 + x_0; & c_2 &= \frac{(x_C - x_0)}{z_0 - z_1} z_0 + x_0; \\ \varphi_1 &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}; & \varphi_2 &= d_1 - a_1 \varphi_1; & d_1 &= \frac{y_0 - y_A}{z_0 - z_1}; \\ \varphi_3 &= d_2 - a_2 \varphi_1; & & & d_2 &= \frac{y_A - y_0}{z_0 - z_1} + y_0; \\ \eta_1 &= \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}; & \eta_2 &= d_1 - c_1 \eta_1; & \eta_3 &= d_2 - c_2 \eta_1; \\ \Psi_1 &= \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}; & \Psi_2 &= f_1 - b_1 \Psi_1; & f_1 &= \frac{y_0 - y_B}{z_0 - z_1}; \\ \Psi_3 &= f_2 - b_2 \Psi_1; & f_2 &= \frac{y_B - y_0}{z_0 - z_1} + y_0. \end{aligned}$$

Применяя биномиальную теорему для вычисления интеграла (6), имеем:

$$J_{mnp} = n! \sum_{\kappa=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n-\kappa+1} \sum_{i=0}^{\kappa+m+1} \frac{(\kappa+m)! (T_{\kappa,j} A_{\kappa,i} + R_{\kappa,j} B_{\kappa,i}) (z_2^s - z_1^s)}{i! j! \kappa! (n-\kappa-j+1)! (\kappa+m-i+1)! (i+j+p+1)!},$$

где $s = i + j + p + 1$;

$$\begin{aligned} T_{\kappa,j} &= \varphi_1^\kappa \varphi_2^j \varphi_3^{n-\kappa-j+1} - \eta_1^\kappa \eta_2^j \eta_3^{n-\kappa-j+1}; \\ A_{\kappa,i} &= b_1^i b_2^{\kappa+m-i+1} - a_1^i a_2^{\kappa+m-i+1}; \\ R_{\kappa,j} &= \Psi_1^\kappa \Psi_2^j \Psi_3^{n-\kappa-j+1} - \eta_1^\kappa \eta_2^j \eta_3^{n-\kappa-j+1}; \\ B_{\kappa,i} &= c_1^i c_2^{\kappa+m-i+1} - b_1^i b_2^{\kappa+m-i+1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Перейдем к рассмотрению интеграла (5) для общего случая ориентирования КЭ в глобальной системе координат $\overline{XOY\overline{Z}}$ (рис. 1). Пусть $\overline{R}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ — текущее значение координат в глобальной системе $\overline{ZOY\overline{X}}$, а $\overline{R}(x, y, z)$ — в локальной системе координат $ZOUX$ связаны ортогональным преобразованием вида

$$\overline{\overline{R}}(i) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 M(j, i) \overline{R}(i), \quad i = 1, 3, \quad (9)$$

где $M(j, i), j = 1, 3, i = 1, 3$ – матрица направляющих косинусов. Тогда, используя свойства ортогонального преобразования (8), интеграл (6) можно записать в виде

$$J_{mnp} = \int_V \bar{R}_{(1)}^m \bar{R}_{(2)}^n \bar{R}_{(3)}^p dV = \int \bar{R}_{(1)}^m dx \int \bar{R}_{(2)}^n dy \int \bar{R}_{(3)}^p dz = \\ = \sum_{i,j,k}^m \sum_{r,s,t}^n \sum_{f,g,h}^p \frac{m! n! p! \iiint_V J_0(x, y, z) d\bar{V}}{i! j! k! r! s! t! f! g! h!}; \quad (10)$$

$$\iiint_V J_0(x, y, z) d\bar{V} = \int x^{-i+r+f} dx \int y^{-j+s+g} dy \int z^{-k+t+h} dz. \quad (11)$$

Учитывая тот факт, что интеграл вида (11) при $i + r + f = m; j + s + g = n; k + t + h = p$ качественно совпадает с ранее взятым интегралом (6), произведем соответствующую замену индексов в выражении (8) для интеграла (10). Окончательно получим

$$J_{mnp} = m! n! p! \sum_{i,j,k=0}^m \sum_{r,s,t=0}^n \sum_{f,g,h=0}^p \sum_{\alpha=0}^{j+s+g+1} x \\ \times \sum_{\beta=0}^{j+s+g-\alpha+1} \sum_{\gamma=0}^{\alpha+i+r+f+1} \frac{(i+s+g)! (\alpha+i+r+f)!}{i! j! k! r! s! t! f! g! h!} x \quad (12) \\ \times \frac{(T_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\gamma} + R_{\alpha,\beta} B_{\alpha,\gamma})}{\alpha! \beta! \gamma! (\gamma+s+g-\alpha-\beta+1)! (\alpha+i+r+f-\gamma+1)!} x \\ \times \frac{(\bar{z}_2^{ss} - \bar{z}_1^{ss})}{(\beta+\gamma+k+t+h+1)!}; \\ ss = \beta + \gamma + k + t + h + 1; \\ T_{\alpha,\beta} = \varphi_1^\alpha \varphi_2^\beta \varphi_3^{\gamma+s+g-\alpha-\beta+1} - \eta_1^\alpha \eta_2^\beta \eta_3^{\gamma+s+g-\beta-\alpha+1}; \\ A_{\alpha,\gamma} = b_1^\gamma b_2^{i+r+f-\alpha+1-\gamma} - a_1^\gamma a_2^{i+r+f-\alpha-\gamma+1}; \\ R_{\alpha,\beta} = \Psi_1^\alpha \Psi_2^\beta \Psi_3^{\gamma+s+g-\alpha-\beta+1} - \eta_1^\alpha \eta_2^\beta \eta_3^{\gamma+s+g-\alpha-\beta+1}; \\ B_{\alpha,\gamma} = c_1^\gamma c_\alpha^{i+r+f+\alpha-\gamma+1} - b_1^\gamma b_2^{i+r+f+\alpha-\gamma+1}.$$

Таким образом, полученные соотношения (4) и (12) позволяют точно определить коэффициенты матрицы жесткости пирамидального конечного элемента при любом порядке полиномов, аппроксимирующих смещения элемента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корнеев В.Г. Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. – Л.: ЛГУ, 1977. – 206 с.
2. Гнучий Ю.Б., Квитка А.Л., Цыбенко А.С. К вопросу формирования уравнений метода конечных элементов при решении трехмерных задач. – Проблемы прочности, 1979, № 5, с. 18–21.
3. Ворошко П.П., Кобельский С.В. Экономичное и компактное представление матриц жесткости для пространст-

венных задач теории упругости. — Проблемы прочности, 1980, № 2, с. 73–76. 4. К и р и ч е в с к и й В.В. Интегрирование по объему в методе конечных элементов. — В кн.: Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев: Будівельник, 1974, вып. 24, с. 42–46. 5. К и с л о о к и й В.Н., С а х а р о в А.С. Проблемно-ориентированный комплекс прочностных расчетов пространственных конструкций. — В кн.: Организация и методика строительного проектирования с применением вычислительной и организационной техники. М.: Госстрой СССР, 1974, вып. 2, сер. 10, с. 1–4. 6. Р о з и к А.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. — М.: Стройиздат, 1977. — 129 с.

УДК 539.3

Л.П.КНЯЗЕВА, В.С.РОМАНЧИК,
канд. физ.-мат.наук (БГУ)

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ КУБИЧЕСКИ-АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Задача упругого равновесия кубически-анизотропной среды, имеющей две взаимно ортогональные оси симметрии четвертого порядка, описывается эллиптической системой уравнений [1]

$$C_{44}\Delta u_i + a \frac{\partial e}{\partial x_i} - d \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + X_i = 0, \quad x \in V, \quad i = 1, 3 \quad (1)$$

с граничными условиями относительно перемещений или напряжений:

$$t_i^{(n)} = (C_{12}e - d \frac{\partial u_i}{\partial x_i})n_i + C_{44} \sum_{j=1}^3 (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})n_j.$$

Здесь Δ — оператор Лапласа; $e = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$; X_i — компоненты вектора объемных сил; S — поверхность, ограничивающая область V , занимаемую средой; $a = C_{12} + C_{44}$; $d = C_{12} + 2C_{44} - C_{11}$, C_{11} , C_{12} , C_{44} — модули упругости среды.

Эллиптичность системы (1) вытекает из следующего рассмотрения. Линейный дифференциальный оператор системы (1) может быть записан в виде

$$L_{ik} = \sum_{j,l=1}^3 C_{ijkl} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \quad (2)$$

Здесь

$$C_{ijkl} = C_{12}\delta_{ik}\delta_{jl} + C_{44}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + d\delta_{ijkl},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера; $\delta_{ijkl} = \sum_{n=1}^3 \delta_{in}\delta_{jn}\delta_{kn}\delta_{ln}$.

Характеристическая матрица системы (1) выражается следующим образом:

$$Q_{ik}(\xi) = \sum_{j,l=1}^3 C_{ijkl}\xi_j\xi_l = (C_{44} + d\xi_i^2)\delta_{ik} + a\xi_i\xi_k.$$