

нии их между собой. Сопоставляя полученные результаты, можно сделать вывод, что нормы невязок при аналитическом, ортогональном и степенном методах нахождения коэффициентов одного порядка. Однако аналитический метод подсчета коэффициентов  $V_n$  имеет ряд преимуществ перед числовыми. Наиболее важным из них является возможность использования конкретного аналитического выражения  $V_n$  для дальнейшего понижения мерности задачи. По-видимому, следует и дальше развивать аналитический метод нахождения коэффициентов неортогональных рядов, взяв в качестве одного из критериев его достоверности совпадение результатов с численными методами решения задачи теории упругости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Крушевский А.Е. Равновесие плиты в точной постановке. В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: БПИ, 1970, с. 51–57. 2. Крушевский А.Е., Акимов В.А. Исследование сходимости рядов перемещений в задаче равновесия плиты в точной постановке. – В кн.: Материалы секции теоретической и прикладной механики: 26-ая конф. БПИ. Минск, 1970, с. 51–57.

УДК 621.791:036

Н.Н.БУТКЕВИЧ, канд.техн.наук (БПИ)

### ПРИМЕНЕНИЕ ТЕРМООПТИЧЕСКИХ АНАЛОГИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ФОТОТЕРМОУПРУГОСТИ

Ряд физических процессов, происходящих в сплошных средах, описывается, например, уравнениями теплопроводности Фурье, Максвелла для электрического вектора:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T \quad (1); \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \vec{E}. \quad (2)$$

Здесь  $T$  — температура;  $a$  — коэффициент температуропроводности;  $E$  — электрический вектор;  $c$  — скорость света;  $\Delta$  — оператор Лапласа. Левые части уравнений (1) и (2), характеризующие нестационарность процесса, указывают, что порядок нестационарности в этих явлениях различен. Однако в квазистационарном состоянии оба процесса подчиняются уравнению Лапласа:

$$\Delta \varphi(x, y, z) = 0,$$

где  $\varphi(x, y, z)$  — функция, описывающая в одном случае тепловое состояние среды, а в другом — распространение волнового фронта.

Физические модели распространения тепловых и световых волн представляют собой трехмерное векторное пространство, линии тока которого являются либо потоком тепла, либо световым лучом. Данное векторное поле можно получить из скалярного поля волновых поверхностей ( $U = \text{const}$ , где  $U$  — фронт волны) путем введения единичного вектора нормали, направленного по касательной к траектории теплового (светового) потока  $\theta$ :

$$\vec{r} = \vec{p} \frac{d\theta}{dF},$$

где  $r$  – плотность потока;  $dF$  – площадь элементарного сечения;  $P$  – единичный вектор нормали.

Таким образом, поток тепла (света) представляет собой линию тока, касательная к которой в каждой точке совпадает с соответствующей нормалью к изоповерхности (рис. 1).

Рассмотрим квазистационарный процесс распространения тепла (света) в двоякопреломляющей оптически активной среде, подчиняющийся уравнению Лапласа  $\Delta\varphi(x, y, z) = 0$ .

Из уравнения Лапласа следует

$$\text{div}(\vec{\text{grad}} \varphi) = 0; \quad \vec{\text{grad}} \varphi = \kappa \vec{r}, \quad (3)$$

где  $r$  – обобщенный вектор плотности потока.

Подставляя в уравнение (3) вместо  $\varphi(x, y, z)$  функции  $T(x, y, z)$  и  $E(x, y, z)$ , получаем известные нам соответствующие уравнения для стационарных процессов:

$$\vec{\text{grad}} T = -\frac{1}{\lambda} \vec{q}; \quad \vec{\text{grad}} E = n \vec{S}, \quad (3a)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $n$  – показатель преломления света в среде,  $\vec{q}$  и  $\vec{S}$  – векторы плотности теплового и светового потока соответственно. Величины  $-1/\lambda$  и  $n$  можно интерпретировать, как сопротивление среды распространению тепла (света).

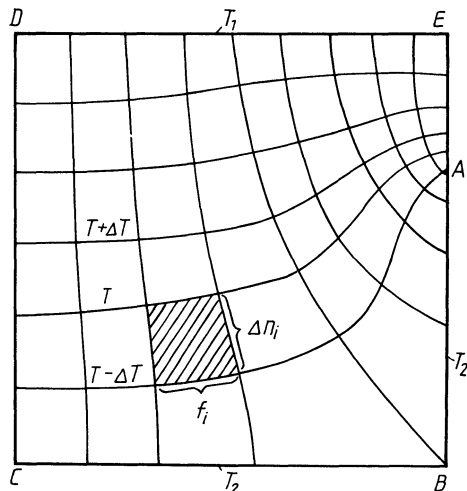


Рис. 1. Сетка изотерм и линии тока в элементе плоской конструкции:  $T_1$  и  $T_2$  – температурные уровни на границе конструкции [2].

В работе [1] показано, что при прохождении света через сплошную среду, в которой анизотропия вызвана наличием температурного поля, показатель преломления зависит от температуры. Эта зависимость неодинакова для разных задач. В отличие от работы [1], где в основном рассматриваются теневые методы, мы используем интерференционный метод обнаружения оптической

неоднородности, причем траектория распространения светового луча перпендикулярна к траектории теплового луча. Падая на плоский элементарный слой, в котором создается температурное поле, световой луч преломляется и разность показателей преломления пропорциональна температурному градиенту (рис. 2). При прохождении через анализатор преломленные лучи интерферируют и дают траектории, каждая из которых равна разности показателей преломления (изохром). Из уравнений (3а) следует, что фронт тепловых и световых волн распределяется по одному и тому же закону.

Следовательно,

$$\frac{dT}{dn} = c; \quad T_1 - T_2 = c(n_1 - n_2). \quad (4)$$

Этот результат можно получить, используя термомеханическую аналогию, разработанную Н.И.Мухелишвили и М.А.Био, согласно которой в упругом теле разность главных термоупругих деформаций пропорциональна разности температур:

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 = (1 + \nu)\alpha(T_1 - T_2) = c_\epsilon(n_1 - n_2).$$

Здесь  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\alpha$  — коэффициент теплового расширения;  $c_\epsilon$  — оптическая постоянная материала по деформациям;  $n_1 - n_2$  — разность хода светового луча. Таким образом,

$$T_1 - T_2 = \frac{c_\epsilon}{(1+\nu)\alpha} (n_1 - n_2) \quad (4a)$$

и мы приходим к соотношению (4). В случае независимости оптико-механических и теплофизических свойств материала от температуры выражение (4а) носит линейный характер и распределение температур в теле следует за распределением разности хода. В противном случае для построения температурного поля по полю показателей преломления необходимо установить характер функций  $c_\epsilon(T)$ :

$$\nu(T); \quad \alpha(T).$$

Непосредственная связь температурного поля с полем показателей преломления (разности хода светового луча) дает возможность в оптически чувствительных материалах рассчитывать термоупругие деформации и напряжения, минуя температурное поле, а в силу линейной связи  $\epsilon(T)$  за пределами упругости можно рассчитывать температурные деформации и в неупругой области.

В качестве примера, иллюстрирующего линейную связь между температурным полем и полем показателей преломления, в работе приводится распределение температур и картина полос (изохром) в полой бесконечном цилиндре с толстыми стенками, наружная и внутренняя поверхности которого имеют температуры соответственно  $T_2$  и  $T_1$ . При этом в любом диаметральном сечении распределение температур подчиняется закону [ 2 ]

$$T(R) = \frac{T_1 - T_0}{\ln b/a} \cdot \ln \frac{b}{R}.$$

Данную задачу можно считать как одномерную и температура есть функция одного только радиуса. Изотермы в теле цилиндра представляют собой кон-

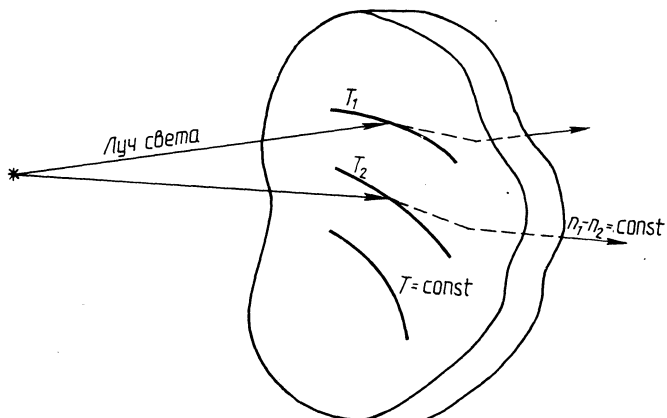


Рис. 2. Прохождение света через анизотропную среду (оптическая анизотропия вызвана температурным градиентом).

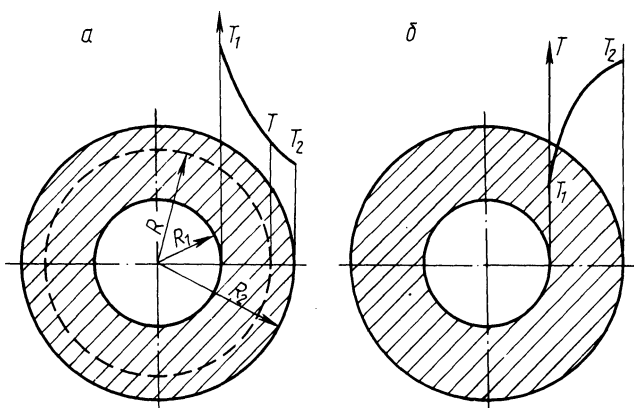


Рис. 3. Распределение температур в процессе охлаждения в полым цилиндре: а — тепловой поток направлен наружу; б — тепловой поток направлен внутрь [2].

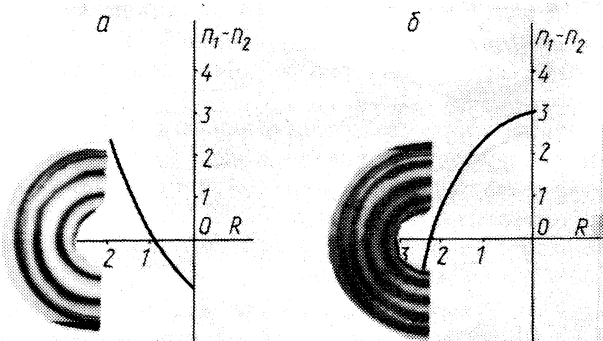


Рис. 4. Распределение показателей преломления в процессе охлаждения  $n_1 - n_2$  — в полым цилиндре: а — тепловой поток направлен наружу; б — тепловой поток направлен внутрь (по экспериментальным данным).

центрические цилиндрические поверхности. Из закона распределения температур по сечению цилиндра следует

$$\text{grad } T = \frac{T_1 - T_0}{\ln b/a} \cdot \frac{dR}{R^2} . \quad (5)$$

На основании (5) построена графическая зависимость для случаев, когда тепловой поток направлен наружу (рис. 3, а) и вовнутрь (рис. 3, б) [2]. На рис. 4, а, б представлена картина изохром и графическая зависимость

$$n_1 - n_2 = f(R) ,$$

построенная по экспериментальным данным. Здесь  $n$  – показатель преломления;  $n_1 - n_2$  – разность хода светового луча. Картина полос, по которой строилась данная зависимость, фиксировалась на оптически чувствительном материале ЭД20-М. Цилиндрическая модель, изготовленная из материала ЭД20-М, подвергалась тепловому воздействию постоянной разности температур, которая оставалась неизменной в процессе охлаждения так, что верхний предел охлаждения после окончания эксперимента достигал температуры фиксации [3]. Расчет температурного поля и проведение эксперимента осуществлялись для температур  $T_1 - T_0 = 55$  °С и размеров цилиндра  $a = 10$  мм;  $b = 30$  мм (рис. 3).

Характер приведенных зависимостей позволяет заключить, что оптически чувствительная модель может служить исходным пунктом для построения температурного поля в любой сплошной среде. Это следует из известных законов [4].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хауф В., Гриуль У. Оптические методы в теплопередаче. – М.: Мир, 1973, с. 45–50.
2. Жуковский В.С. Основы теории теплопередачи. – Л.: Энергия, 1969, с. 14, 31.
3. Буткевич Н.Н. Исследование напряженного состояния кованых штампов с неоднородным термическим упрочнением: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Минск, 1972. – 62 с.
4. Кирпичев М.В. Теория подобия. – М.: АН СССР, 1953, с. 43–47.

УДК 539.31

В.Н.АПАНОВИЧ, канд.техн.наук,  
В.А.ГУГЛЯ (БПИ)

### ТОЧНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ ПИРАМИДАЛЬНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Численная реализация метода конечных элементов (МКЭ) для решения трехмерных задач теории упругости связана с преодолением значительных вычислительных проблем. Одной из таких проблем является вычисление коэффициентов матрицы жесткости конечных элементов (КЭ) высоких порядков точности [1–5].

В данной статье выводятся соотношения для точного вычисления коэффициентов матрицы жесткости произвольного пирамидального конечного элемента с полиномиальной аппроксимацией перемещений.