некоторых случаях (задача 3) удается точно проинтерполировать граничное условие на отдельных поверхностях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондратюк В.Ф., Крушевский А.Е. Применение ЭВМ для определения напряженно-деформированного состояния деталей машин на основе вариационного уравнения Лагранжа. – В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Выш. шк., 1977, вып. 4, с. 9–16. 2. Апанович В.Н. Исследование устойчивости и сходимости методов Ритца и Трефтца применительно к некоторым пространственным задачам теории упругости. – В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Выш. шк., 1981, вып. 8, с. 16–20. 3. Апанович В.Н. Применение вариационного принципа Лагранжа для решения некоторых пространственных статических и динамических прикладных задач теории упругости: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Харьков, 1982. – 22 с. 4. Кононенко Е.С. Задача о сжатии параллелепипеда между жесткими плитами без скольжения. – В кн.: Исследования по теории сооружений. М., 1954, вып. 6, с. 455–468. 5. Победря Б.Е., Шешенин С.В. Некоторые задачи о равновесии упругого параллелепипеда. – Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 1, с. 74–86. 6. Мальцев Л.Е. Сжатие изотропной призмы. – В кн.: Тр. Тюмен. индустр. ин-та, 1961, вып. 8, с. 34–42.

УДК 539.3:534.1

М.Д.МАРТЫНЕНКО, д-р физ.-мат.наук,

ФАМ ДЫК ТИНЬ (БГУ)

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Задачи об устойчивости круглых пластин переменной толщины, сжатых равномерно распределенными радиальными силами P, приводятся к интегрированию уравнений с переменными коэффициентами и поэтому в общем случае не имеют точного решения. Даже в сравнительно простых случаях линейно переменной или экспоненциально переменной толщины определение критической силы связано с решением алгебраического уравнения бесконечного порядка [1]. В настоящей работе дается применение метода возмущения для определения критической силы защемленно закрепленных и шарнирно закрепленных круглых пластин. Полученные при этом трехчленные формулы для критической силы уточняют результаты [2].

1. Пусть толщина пластины изменяется по закону

$$h(r) = h_0[1 + \lambda f(r)], \tag{1.1}$$

где h_0, λ – постоянные; $r = \frac{x}{a}$; x – радиальная координата, отсчитываемая от центра пластины, a – ее радиус. Предполагается $|\lambda| \ll 1$.

Уравнения осесимметричной формы потери устойчивости и критической нагрузки имеют вид [1, 3]:

$$\left.\begin{aligned} & h\left(v''+\frac{1}{r}v'-\frac{1}{r^2}v\right)+h'\left(v'+\frac{\nu}{r}v\right)=0\,; \\ & \frac{D}{a^2}\left(\theta''+\frac{1}{r}\theta'-\frac{1}{r^2}\theta\right)+\frac{D'}{a^2}\left(\theta'+\frac{\nu}{r}\theta\right)-N\theta=0, \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

где

$$v=\frac{u}{a}\,;\quad N=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(v'+\frac{\nu}{r}v\right);$$

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}=D_0[1+\lambda f(r)]^3;\quad D_0=\frac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)}, \tag{1.3}$$

u , θ – радиальное и угловое перемещения точек срединной поверхности пластины; E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Предположим, что на контуре пластины выполняются такие условия:

$$v(0)=\theta(0)=\theta(1)=0;\ N(1)=-P. \tag{1.4}$$

Представим искомые величины в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} & v=v_0+\lambda v_1+\lambda^2 v_2+0(\lambda^3)\,; \\ & \theta=\theta_0+\lambda\theta_1+\lambda^2\theta_2+0(\lambda^3)\,; \\ & \frac{a^2}{D_0}P=P_0+\lambda P_1+\lambda^2 P_2+0(\lambda^3)\,; \\ & \frac{a^2}{D_0}N=N_0+\lambda N_1+\lambda^2 N_2+0(\lambda^3) \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

Подставляя (1.1), (1.3) и (1.5) в (1.2) и (1.4) и приравнивая нулю коэффициенты при разных степенях λ , получим для определения коэффициентов разложения (1.5) следующие граничные задачи:

$$v_0''+\frac{1}{r}v_0'-\frac{1}{r^2}v_0=0;\ v_0(0)=0;\ N_0(1)=-P_0; \tag{1.6}$$

$$\theta_0''+\frac{1}{r}\theta_0'-\frac{1}{r^2}\theta_0-N_0\theta_0=0;\ \theta_0(0)=\theta_0(1)=0; \tag{1.7}$$

$$v_1''+\frac{1}{r}v_1'-\frac{1}{r^2}v_1+\frac{h_0^2}{12a^2}f'N_0=0;\ v_1(0)=0;\ N_1(1)=-P_1; \tag{1.8}$$

$$\left.\begin{aligned} & \theta_1''+\frac{1}{r}\theta_1'-\frac{1}{r^2}\theta_1-N_0\theta_1-N_1\theta_0+3fN_0\theta_0+3f'\left(\theta_0'+\frac{\nu}{r}\theta_0\right)=0, \\ & \theta_1(0)=\theta_1(1)=0; \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

$$\left.\begin{aligned} & v_2''+\frac{1}{r}v_2'-\frac{1}{r^2}v_2+\frac{h_0^2}{12a^2}(f'N_1-2ff'N_0)=0; \\ & v_2(0)=0;\ N_2(1)=-P_2\,; \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\theta_2'' + \frac{1}{r}\theta_2' - \frac{1}{r^2}\theta_2 - N_0\theta_2 - N_2\theta_0 - 6f^2N_0\theta_0 + 3fN_1\theta_0 - \\
&- 3ff'(\theta_0' + \frac{\nu}{r}\theta_0) - N_1\theta_1 + 3fN_0\theta_1 + 3f'(\theta_1'' + \frac{\nu}{r}\theta_1) = 0; \\
&\theta_2(0) = \theta_2(1) = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (1.11)$$

Уравнения (1.6) – (1.7) представляют известную задачу об устойчивости круглой пластины постоянной толщины. Ее собственные значения $\{P_{0n}\}_{n=1}^{\infty}$ и ортонормированные собственные функции $\{\theta_{0n}\}_{n=1}^{\infty}$ определяются следующим образом:

$$J_1(\sqrt{P_{0n}}) = 0; (n = 1, 2, ...); \theta_{0n} = \frac{\sqrt{2}}{J_0(\sqrt{P_{0n}})} J_1(\sqrt{P_{0n}}\, r);$$

$$\int_0^1 \theta_{0\kappa}\theta_{0n} r dr = \begin{cases} 0, & \kappa \neq n, \\ 1, & \kappa = n. \end{cases} \quad (1.12)$$

В частности $P_{01} = 14{,}68$ [3].

Решая граничную задачу (1.8), получим следующее выражение для N_{1n}:

$$N_{1n} = -P_{1n} - P_{0n} g_1(r);$$

$$g_1(r) = f(r) - f(1) - \frac{1}{2}[g(r) - g(1)];$$

$$g(r) = [rf(r) - \frac{1}{r}\int_0^r r^2 f(r) dr]' + \frac{\nu}{r}[rf(r) - \frac{1}{r}\int_0^r r^2 f(r) dr].$$

Положим $\theta_0 = \theta_{0\kappa}$, $N_0 = N_{0\kappa}$ в (1.7) и $\theta_1 = \theta_{1n}$, $N_0 = N_{0n}$, $N_1 = N_{1n}$ в (1.9), затем умножим (1.9) на $r\theta_{0\kappa}$ (1.7) – на $r\theta_{1n}$, вычтем полученные результаты и проинтегрируем эту разность по r от 0 до 1. С помощью формулы Грина получим

$$P_{1n} = \int_0^1 [P_{0n}(3f - g_1)r + 3f'(\frac{1}{2} - \nu) + \frac{3}{2}f''r]\theta_{0n}^2 dr - \frac{3}{2}f'(1)\theta_{0n}^2(1); \quad (1.13)$$

$$C_{n\kappa} = \int_0^1 \theta_{1n}\theta_{0\kappa} r dr = \frac{1}{P_{0n} - P_{0\kappa}} \int_0^1 [P_{0n}(3f - g_1)\theta_{0n} -$$
$$- 3f'(\theta_{0n}' + \frac{\nu}{r}\theta_{0n})]\theta_{0\kappa} r dr$$
$$(n \neq \kappa). \quad (1.14)$$

Совершенно аналогично из (1.10) и (1.11) получим

$$P_{2n} = -P_{1n}\int_0^1 [(g_2 - 3f)\theta_{0n}^2 + \theta_{1n}\theta_{0n}] r dr - P_{0n}\int_0^1 [(g_3 + 6f^2 -$$
$$- 3fg_1)\theta_{0n}^2 + (g_1 - 3f)\theta_{1n}\theta_{0n}] r dr + 3\int_0^1 f'\theta_{0n} \, [f(\theta_{0n}' + \frac{\nu}{r}\theta_{0n}) -$$
$$- (\theta_{1n}' + \frac{\nu}{r}\theta_{1n})] r dr, \quad (1.15)$$

где

$$g_2(r) = f(r) - f(1) + \phi_0'(r) + \frac{\nu}{r}\phi_0(r) - \phi_0'(1) - \nu\phi_0(1);$$

$$\phi_0(r) = \frac{1}{2} r \int_0^r f'(r)dr - \frac{1}{2r}\int_0^r r^2 f'(r)dr;$$

$$g_3(r) = f^2(1) - f^2(r) + f(r)g_1(r) + \phi_1'(r) + \frac{\nu}{r}\phi_1(r) - \phi_1'(1) -$$

$$-\nu\phi_1(1);$$

$$\phi_1(r) = \frac{1}{2} r \int_0^r (2f + g_1)f' dr - \frac{1}{2r}\int_0^r r^2 f'(2f + g_1)dr.$$

Собственные значения исходной задачи (1.2), (1.4) определяются по формуле

$$P_n = P_{0n} + \lambda P_{1n} + \lambda^2 P_{2n} + 0(\lambda^3), \quad (n = 1, 2, ...)$$

2. Используя известные формулы [4], можно получить следующие соотношения:

$$\int_0^1 r^{2к+1}\theta_{0n}^2 dr = \begin{cases} 1, к=0 \\ \frac{1}{3}, к = 1 \\ \frac{1}{2к+1} + \sum_{i=1}^{к-1} \frac{P_{0n}^{-i}}{2(к-i)+1} \frac{2к(2к-2)...(2к-2i+2)}{(2к+1)(2к-1)...(2к-2i+3)} \\ \times(1-к^2)[1-(к-1)^2]...[1-(к-i+1)^2], к\geqslant 2 \end{cases} \tag{2.1}$$

С помощью формулы (2.1) интеграл в (1.13) вычисляется точно, если $f(r) = \sum_{к=0}^{M} C_к r^{2к}$. В этом случае имеем

$$P_{1n} = \sum_{к=0}^{M-1} [P_{0n}(3 - \frac{1-\nu}{2к+2})C_к + 6(1+к)(1+к-\nu)C_{к+1}] \int_0^1 r^{2к+1}\theta_{0n}^2 d$$

$$+ P_{0n}C_M(3 - \frac{1-\nu}{2M+2}) \int_0^1 r^{2M+1}\theta_{0n}^2 dr + \sum_{к=0}^{M} C_к[P_{0n}\frac{1-\nu}{2к+2} -$$

$$-3к\theta_{0n}^2(1)]. \tag{2.2}$$

Значение P_{2n} находится из (1.15) по известному выражению для P_{1n}.

3. Задача об устойчивости шарнирно закрепленной пластины решается совершенно аналогично. В этом случае формулы (1.13) – (1.15) остаются в силе, а вместо (1.12) и (2.1) имеют место следующие формулы:

$$\theta_{0n} = \frac{\sqrt{2}\, J_1(\sqrt{P_{0n}}\, r)}{J_1(\sqrt{P_{0n}})\sqrt{1 - \frac{1-\nu^2}{P_{0n}}}};$$

$$J_1'(\sqrt{P_{0n}})\sqrt{P_{0n}} + \nu J_1(\sqrt{P_{0n}}) = 0, \qquad (n = 1, 2...)$$

$$\int_0^1 r^{2\kappa+1}\theta_{0n}^2 dr = \begin{cases} 1, \kappa = 0 \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\,\frac{\nu - 1}{P_{0n} + \nu^2 - 1}; \quad \kappa = 1 \\ \frac{2\kappa^2 + 2\kappa\nu + \nu^2 + P_{0n} - 1}{(2\kappa+1)\ (P_{0n} + \nu^2 - 1)} + \\ + \frac{1}{P_{0n} + \nu^2 - 1}\sum_{i=1}^{\kappa-1} \frac{P_{0n}^{-i}}{2(\kappa-i)+1} \cdot [\nu^2 - 1 + P_{0n} + \\ + 2\nu(\kappa-i) + 2(\kappa-i)^2]\ \times \\ \times \frac{2\kappa(2\kappa-2)\ \ldots\ (2\kappa-2i+2)}{(2\kappa+1)(2\kappa-1)\ldots(2\kappa-2i+3)}(1-\kappa^2)\ \times \\ \times [1-(\kappa-1)^2]\ldots[1-(\kappa-i+1)^2],\ \kappa \geqslant 2. \end{cases}$$

С помощью этих формул можно выписать явные выражения для P_{1n}, P_{2n} в случае, когда $f(r) = \sum_{\kappa=0}^{M} C_\kappa r^{2\kappa}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурмистров Е.Ф., Маслов Н.М. Устойчивость круглых пластин переменной толщины. – Прикладная механика, 1975, вып. 11, с. 121–124. 2. Тагиев И.Г., Тагизаде А.Г. О нахождении критической силы равномерно-сжатой по контуру круглой пластины переменной толщины. – Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 4, с. 179–182. 3. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967, с. 445–454. 4. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 152 с.

УДК 539.311

А.Е.КРУШЕВСКИЙ, канд.техн.наук,
В.А.АКИМОВ (БПИ)

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ НА ПРИМЕРЕ РАВНОВЕСИЯ ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПЛИТЫ

Решения некоторых задач пространственной теории упругости в ряде случаев приводят к неортогональным рядам. Коэффициенты в этих рядах обычно искались посредством численного решения соответствующих бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. В статье [1] был предложен аналитический метод нахождения коэффициентов, который позволяет, таким образом, строить решения задач пространственной теории упругости в замкнутом виде. В таком случае представляет особый интерес сравнение аналитического