

Решением краевой задачи (17) служит функция

$$f(\xi) = \frac{\tau_{\infty} R}{m} \xi.$$

Коэффициент интенсивности напряжений в вершине угла определится теперь по формуле

$$N = \tau_{\infty} \left(\frac{2m\beta}{\pi R} \right)^{\lambda-1} \quad (\lambda = \pi/2\beta). \quad (18)$$

Критическое значение усилия τ_{∞} , отвечающее страгиванию трещины, теперь определится из (18) и (13) в виде

$$\tau_{\infty} = K_C l^{\frac{1}{2} - \lambda} R^{\lambda-1} \left(\frac{\pi}{\beta} \right)^{\lambda - \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2m} \right)^{\lambda-1}. \quad (19)$$

В частном случае вырождения углового выреза в разрез длины H ($\beta = \pi$) критерий разрушения (19) принимает вид $\tau_{\infty} \sqrt{\frac{H}{2}} = K_C$, совпадающий с известным $\tau_{\infty} \sqrt{\frac{H+1}{2}} = K_C$ при условии малости параметра l/H .

Другой предельный случай соответствует переходу к полуплоскости с трещиной длины l ($\beta \rightarrow \pi/2$). Из (19) следует тогда соотношение $\frac{\tau_{\infty} \sqrt{l}}{\sqrt{2}} = K_C$, совпадающее с точным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.Н. Механика хрупкого разрушения. — М.: Наука, 1974. — 640 с.
2. Черепанов Г.Н., Ершов Л.В. Механика разрушения. — М.: Наука, 1974. — 224 с.

УДК 539.3

А.Е. КРУШЕВСКИЙ, канд. техн. наук,
В.Н. АПАНОВИЧ, канд. техн. наук (БПИ)

О СХОДИМОСТИ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА ПРИ ТОЧЕЧНОМ ВЫПОЛНЕНИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

При решении задач теории упругости аналитическими вариационными методами скорость сходимости приближенных решений к точному в значительной степени определяется аппроксимативными свойствами применяемых координатных систем.

В настоящее время для улучшения качества аппроксимации решения краевой задачи применяются структуры, удовлетворяющие либо граничным условиям (ГУ), либо внутренним условиям равновесия [1].

В работе [2] показано, что использование полиномиальных координатных систем, точно удовлетворяющих условиям равновесия внутри тела, значительно улучшает сходимость приближенных решений и повышает устойчивость вычислительного процесса. В данной работе исследуется сходимость вариаци-

онных решений некоторых трехмерных задач теории упругости при точном выполнении не только условий равновесия внутри тела, но и граничных условий в некоторых точках поверхности.

Методика удовлетворения внутренних и граничных условий базируется на построении систем алгебраических уравнений связей между коэффициентами стандартных степенных рядов [1] с последующим преобразованием последних на основе общих решений уравнений связей [3].

В работе рассмотрены задачи о равновесии куба со стороной $l = 1$ при следующих исходных данных.

Задача 1. $\vec{P}(x, y, z) = \{0; 0; \cos\pi x \cos\pi y\}$, при $z = 0,5$;

$$\vec{P}(x, y, z) = \{0; 0; -\cos\pi x \cos\pi y\}, \text{ при } z = -0,5,$$

где $\vec{P}(x, y, z)$ – вектор поверхностных нагрузок.

Задача 2. $\vec{P}(x, y, z) = \{0; 0; -25\}$, при $z=0,5$; $-0,15 \leq x \leq 0,15$; $-0,15 \leq y \leq 0,15$;

$$\vec{P}(x, y, z) = \{0; 0; 25\}, \text{ при } z = -0,5; -0,15 \leq x \leq 0,15; -0,15 \leq y \leq 0,15.$$

Задача 3. $\vec{U}(x, y, z) = \{0; 0; -w_0\}$, при $z = 0,5$;
 $\vec{V}(x, y, z) = \{0; 0; w_0\}$, при $z = -0,5$.

Модуль упругости материала куба $E = 2 \cdot 10^6$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, смещение грани $w_0 = 0,1$.

В силу симметрии решения рассматривалась 1/8 куба. ГУ удовлетворялись точно в точках с координатами: (0; 0; 0,5) для задачи 1; (0; 0; 0,5) для задачи 2; (0; 0; 0,5); (0; 0,25; 0,5); (0; 0,5; 0,5); (0,25; 0; 0,5); (0,25; 0,25; 0,5); (0,5; 0; 0,5); (0,5; 0,5; 0,5) для задачи 3.

Исследование сходимости проводилось сравнением численных результатов решений задач при различных порядках аппроксимации вектора смещений куба. При этом максимальная степень n аппроксимирующих полиномов последовательно увеличивалась от $n = 1$ до $n = 9$. Поскольку уравнения равнове-

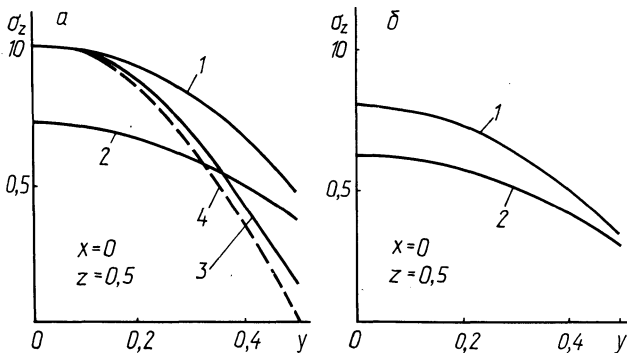


Рис. 1. Распределение напряжений σ_z для задачи 1: а – на поверхности куба; б – внутри куба; 1 – решение с выполнением граничного условия для $n = 3$; 2, 3 – соответственно решение без выполнения граничных условий для $n = 3$ и $n = 5$; 4 – точное решение.

сия внутри тела удовлетворялись точно, то оценка погрешности решений проводилась также по выполнению граничных условий.

Численные эксперименты, проведенные на ЭВМ ЕС-1022, показали, что точное выполнение граничных условий в области максимальной интенсивности поверхностных нагрузок значительно улучшает сходимость приближенных решений к точному. Для задачи 1 (рис. 1) показаны распределения напряжений σ_z по поверхности и внутри куба, рассчитанные для $n = 3$ (второе приближение) и $n = 5$ (третье приближение). Из графиков рис. 1 видно, что точечное удовлетворение граничных условий позволяет значительно уточнить расчетное напряженно-деформированное состояние куба в заданной области при низких порядках аппроксимации вектора смещений. Наблюдается хорошая сходимость приближенных решений к точному по энергии (рис. 2), где $F(\vec{V})$ — значение минимизируемого энергетического функционала; N — количество координатных функций, удерживаемых в решении.

На рис. 3 показаны графики напряжений σ_z на верхней грани куба, вычисленные для задачи 2. Анализ этих графиков показывает, что точечное выполнение граничных условий в области приложения нагрузки способствует успешному выполнению указанных условий на всей грани. С увеличением порядка аппроксимации поверхность куба "освобождается" от напряжений в тех областях, где не заданы поверхностные нагрузки. При решении этой задачи также наблюдается хорошая сходимость приближенного решения к точному по энергии (рис. 4).

В задаче 3 граничное условие в перемещениях точно интерполировалось по семи точкам. Решение проведено для $n = 5$.

Анализ расчетных значений перемещений верхней грани куба показывает, что условие $w = -w_0$ при $z = 0,5$ (соответственно $w = w_0$ при $z = -0,5$) на всей грани выполняется точно. Значения перемещений u и v на этих же гранях на 4–5 порядков меньше, чем значения перемещений w , что свидетельствует о высокой точности выполнения условий $u = v = 0$ при $z = \pm 0,5$.

На рис. 5, а, б показаны графики перемещений боковых граней куба, из которых видно, что при сжатии между жесткими плитами без скольжения куб приобретает четко выраженную "бочкообразную" форму. Этот факт подтверждается данными экспериментов [4].

В табл. 1 приведены значения напряжений в некоторых точках куба, полученные авторами (верхняя строка), вариационно-разностным методом [5] (вторая строка), методом М.М.Филоненко–Бородича [4] (третья строка), методом Ритца [6] (четвертая строка). Здесь напряжения отнесены к $2E w_0/1$.

Как видно из таблицы, внутри куба полученное авторами решение хорошо согласуется с решением Б.Е.Победри, С.В.Шешенина [5]. В частности, оба решения обнаруживают тенденцию уменьшения напряжений σ_z при приближении к поверхности куба. Однако предлагаемое решение хуже отражает особенность напряжений на контуре площадки давления. Как показано в работах [4, 5], напряжения σ_z при стремлении к границе площадки резко возрастают. Сглаживание особенности в предлагаемом решении связано, очевидно, с весьма грубой аппроксимацией вектора смещений куба.

Таким образом, анализ полученных результатов показывает, что точечное удовлетворение граничных условий является эффективным средством уточнения вариационных решений краевых задач в заданных областях. При этом в

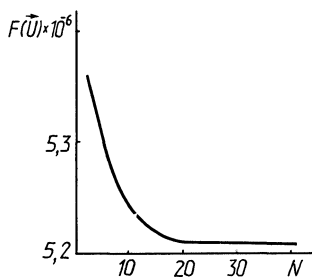


Рис. 2. Сходимость приближенных решений по энергии для задачи 1.

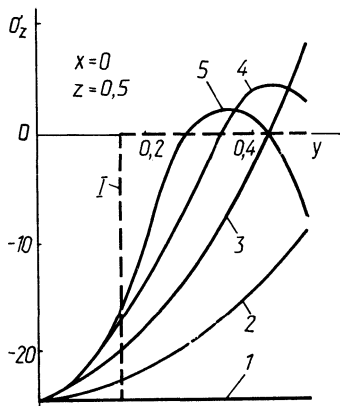


Рис. 3. Распределение напряжений σ_z по поверхности куба для задачи: 1 – 5 – соответственно $n = 1$; 1 – точное решение.

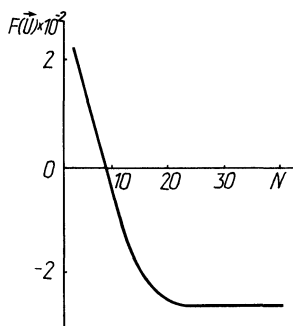
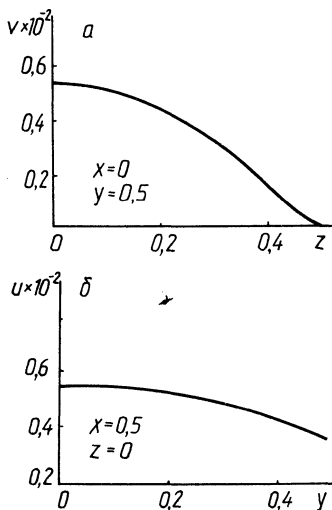


Рис. 4. Сходимость приближенных решений по энергии для задачи 2.

Рис. 5. Графики перемещений боковой поверхности куба при сжатии между двумя жесткими плитами без проскальзывания.



Т а б л и ц а 1

Значения напряжений σ_z в некоторых точках куба

	$x = 0 ; z = 0$			$x = 0 ; z = 0,5$			
	y	0,0	0,25	0,5	0,0	0,25	0,5
σ_z		1,14	1,13	1,11	0,80	0,76	0,66
		1,20	1,17	1,02	0,98	1,01	1,55
		1,11	1,21	0,97	1,01	0,94	1,21
		—	—	—	1,65	1,56	1,21

некоторых случаях (задача 3) удастся точно проинтерполировать граничное условие на отдельных поверхностях.

ЛИТЕРАТУРА

1. К о н д р а т ю к В.Ф., К р у ш е в с к и й А.Е. Применение ЭВМ для определения напряженно-деформированного состояния деталей машин на основе вариационного уравнения Лагранжа. – В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Выш. шк., 1977, вып. 4, с. 9–16. 2. А п а н о в и ч В.Н. Исследование устойчивости и сходимости методов Рунца и Трефца применительно к некоторым пространственным задачам теории упругости. – В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Выш. шк., 1981, вып. 8, с. 16–20. 3. А п а н о в и ч В.Н. Применение вариационного принципа Лагранжа для решения некоторых пространственных статических и динамических прикладных задач теории упругости: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Харьков, 1982. – 22 с. 4. К о н о н е н к о Е.С. Задача о сжатии параллелепипеда между жесткими плитами без скольжения. – В кн.: Исследования по теории сооружений. М., 1954, вып. 6, с. 455–468. 5. П о б е д р я Б.Е., Ш е ш е н и н С.В. Некоторые задачи о равновесии упругого параллелепипеда. – Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 1, с. 74–86. 6. М а л ь ц е в Л.Е. Сжатие изотропной призмы. – В кн.: Тр. Тюмен. индустр. ин-та, 1961, вып. 8, с. 34–42.

УДК 539.3:534.1

М.Д.МАРТЫНЕНКО, д-р физ.-мат.наук,
ФАМ ДЫК ТИТЬ (БГУ)

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Задачи об устойчивости круглых пластин переменной толщины, сжатых равномерно распределенными радиальными силами P , приводятся к интегрированию уравнений с переменными коэффициентами и поэтому в общем случае не имеют точного решения. Даже в сравнительно простых случаях линейно переменной или экспоненциально переменной толщины определение критической силы связано с решением алгебраического уравнения бесконечного порядка [1]. В настоящей работе дается применение метода возмущения для определения критической силы защемленно закрепленных и шарнирно закрепленных круглых пластин. Полученные при этом трехчленные формулы для критической силы уточняют результаты [2].

1. Пусть толщина пластины изменяется по закону

$$h(r) = h_0[1 + \lambda f(r)], \quad (1.1)$$

где h_0, λ – постоянные; $r = \frac{x}{a}$; x – радиальная координата, отсчитываемая от центра пластины, a – ее радиус. Предполагается $|\lambda| \ll 1$.

Уравнения осесимметричной формы потери устойчивости и критической нагрузки имеют вид [1, 3]: