

Здесь

$$\alpha_m = \sqrt{\frac{16\eta^2 \xi_m^2}{\rho h^2 G} - 1}$$

В результате решения можно сделать следующие выводы. Медленные неустановившиеся течения вязкой и вязкоупругой максвелловской жидкостей при выдавливании параллельными пластинами произвольной формы определяются двумя функциями $f(z, t)$ и $\psi(x, y)$. Функция $f(z, t)$ зависит от реологических констант жидкости. Она определена как для вязкой, так и для вязкоупругой максвелловской среды. Для решения конкретных задач существенна независимость этой функции от формы пластин.

Функция $\psi(x, y)$ — гармоническая функция, не зависящая от реологических констант жидкости. Ее определение сводится к решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа при граничном условии определенного вида $\psi(x, y)$ зависит только от формы пластин. При рассмотрении некоторых частных случаев формы пластин могут быть использованы готовые решения этой задачи, известные для ряда областей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д и н н и к А.Н. Продольный изгиб и кручение. — М.: АН СССР, 1955. — 390 с.
2. Л а п у ш и н а Б.И. Течение вязкопластичной среды между сближающимися дисками при импульсном изменении скорости. — В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Выш. шк., 1980, вып. 7, с. 97–103.
3. Л а м б и н а Е.Н. О принципе соответствия для медленных неустановившихся течений вязко-упругих линейных жидкостей. — В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск, Выш. шк., 1980, вып. 7, с. 90–93.

УДК 539.3

С.Ф.АНДРЕЕВ, Г.Ф.ЕРШОВ,
д-р.техн.наук (БПИ)

К РАСЧЕТУ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Рассматривается осесимметричное напряженно-деформированное состояние тонкостенной оболочки вращения, геометрия которой не может быть описана единым аналитическим уравнением. Тонкостенная оболочка состоит из набора двух конических оболочек, сопряженных посредством оболочки вращения, линией контура которой является дуга окружности произвольного радиуса R (рис. 1).

В качестве граничных условий на внешнем крае оболочки принято

$$\xi_K = 0; \varphi_K = 0,$$

что соответствует жесткому защемлению контура. Здесь ξ_K — радиальное перемещение точек срединной поверхности; φ_K — угол поворота нормали к срединной поверхности.

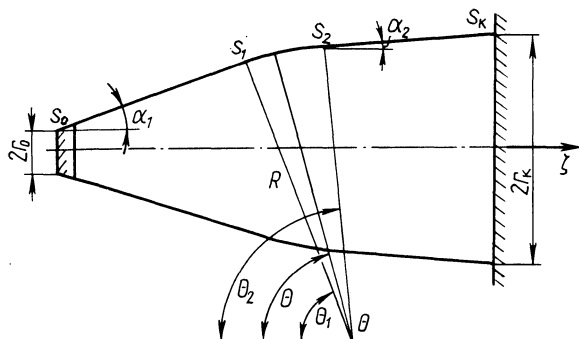


Рис. 1. Геометрия оболочки вращения.

Во внутренний контур радиуса r_0 впаива жесткая шайба, передающая на оболочку действие осевой силы P_ζ , в силу чего можем положить на контуре

$$\xi_0 = 0; \quad \varphi_0 = 0.$$

Как известно [1], в случае малых деформаций, исследование осесимметрично-напряженно-деформированного состояния оболочек может быть сведено к интегрированию системы дифференциальных уравнений первого порядка, которую запишем в виде

$$\frac{d\vec{y}}{ds} = A\vec{y} + \vec{b}, \quad (1)$$

где \vec{y} — вектор состояния оболочки; A — матрица переменных коэффициентов; \vec{b} — вектор свободных членов; s — длина меридиана, отсчитываемая от вершины срединной поверхности. Следуя [2], в качестве искоемых компонент вектора состояния выберем следующие величины: $\xi = y_1$ — радиальное перемещение; $\varphi = y_2$ — угол поворота нормали; $\mu_3 = y_3$ — изгибающий момент в сечении s ; $N_3 = y_4$ — нормальное усилие в сечении s ; ζ — осевое перемещение.

В силу последнего система уравнений (1) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{ds} = -y_1 \nu \frac{\cos\theta}{r} - y_2 \sin\theta + y_4 \cos\theta \frac{1-\nu^2}{Eh} + \varepsilon_1 \cos\theta; \\ \frac{dy_2}{ds} = -y_2 \nu \frac{\cos\theta}{r} - \frac{y_3}{D} + (1+\nu)\chi_T; \\ \frac{dy_3}{ds} = y_2 \frac{\cos^2\theta}{r^2} \frac{Eh^3}{12} - y_3(1-\nu) \frac{\cos\theta}{r} + y_4 \sin\theta - \\ - \frac{\cos\theta}{r} \frac{F(s)}{2\pi}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_4}{ds} = y_1 \frac{Eh}{r^2} - y_3(1-\nu) \frac{\cos \theta}{r} + \nu \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{F(s)}{2\pi} - \\ - g_r \cos \theta - g_n \sin \theta ; \\ \frac{dy_5}{ds} = -y_1 \nu \frac{\sin \theta}{r} + y_2 \cos \theta + y_4 \cos \theta \sin \theta \frac{1-\nu^2}{Eh} + \\ + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{1-\nu^2}{Eh} \frac{F(s)}{2\pi} + \epsilon_T \sin \theta . \end{array} \right. \quad (2)$$

Здесь

$F(s) = P \int_{s_0}^s [g_n(s) \cos \theta - g_r(s) \sin \theta] 2\pi r ds$ – осевая нагрузка на выделенную часть оболочки; θ – угол между нормалью к меридиану в заданной точке и осью вращения; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; h – толщина оболочки; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость; $g(s)$, $g_r(s)$ – распределенные по срединной поверхности внешние нормальные и касательные силы, отнесенные к единице площади; $\epsilon_T = \alpha_T T$ – тепловое относительное удлинение срединной поверхности; $\kappa_T = \frac{3}{h} \alpha_T T$ – тепловое изменение кривизны срединной поверхности $T = \cos st$ – изменение температуры оболочки; α_T – среднее значение коэффициента линейного расширения.

Для численного решения системы (2) разобьем весь интервал (s_0, s_K) интегрирования на несколько участков $s_{i-1} \leq s < s_i$ ($i = 1, 2, 3$), на каждом из которых значения r , θ определены как функции текущей координаты s :

$$\begin{aligned} s_0 \leq s < s_1 ; r &= s \cdot \sin \alpha_1 ; \theta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 ; \theta = \theta_1 ; \\ s_1 \leq s < s_2 ; r &= s_1 \sin \alpha_1 + R(\sin \theta - \cos \alpha_1) ; \\ \theta &= \theta_1 + \theta^+ ; \theta^+ = \frac{1}{R} (s - s_1) ; \\ s_2 \leq s \leq s_K ; r &= s_1 \sin \alpha_1 + R(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) + (s - s_2) \sin \alpha_2 ; \\ \theta_2 &= \frac{\pi}{2} - \alpha_2 ; \theta = \theta_2 . \end{aligned}$$

Систему дифференциальных уравнений (2) решаем методом ортогональной прогонки [3], разбивая интервал интегрирования на m равных участков

$$\Delta s = \frac{s_K - s_0}{m} .$$

Матрица начальных значений, соответствующая условию на внутреннем контуре, записывается в виде

$$z_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

где последний столбец соответствует частному решению z_{k0} системы (2). Граничные условия на внешнем контуре s_k приводят к системе алгебраических уравнений относительно коэффициентов C_1 и C_2 :

$$\begin{aligned} z_{11}C_1 + z_{12}C_2 &= \xi_k - z_{10}; \\ z_{21}C_1 + z_{22}C_2 &= \varphi_k - z_{20}. \end{aligned}$$

Общее осевое усилие представим суммой осевых усилий на отдельных участках:

$$F(s) = P_\zeta + \sum_{k=1}^3 F_k(s).$$

Для

$$g_n(s) = \text{const}, \quad g_r(s) = \text{const}$$

имеем:

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \pi s^2 (g_n \sin^2 \alpha_1 - 0,5 \sin 2\alpha_1); \\ F(s) &= 2\pi R \{ s_1 \cos \theta_1 - R \sin \theta_1 \} (g_n \sin \theta - g_r \cos \theta) + \\ &+ 0,25 [\sin 2\theta_1 (g_n \sin 2\theta^+ + g_r \cos 2\theta^+) + \\ &+ g_n \cos 2\theta_1 (\sin^2 \theta^+ - \cos^2 \theta) - g_r \sin 2\theta^+ (\sin^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_1)] - \\ &- 0,5 g_r \theta^+ \}; \\ F_3(s) &= 2\pi (g_n \cos \theta_2 - g_r \sin \theta_2) \{ [s_1 \cos \theta_1 - s_2 \cos \theta_2 + \\ &+ R (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)] (s - s_2) + 0,5 (s^2 - s_2^2) \cos \theta_2 \} \end{aligned}$$

Для численного решения была составлена программа на алгоритмическом языке ФОРТРАН. Рассматривалась стальная оболочка $E = 2,05 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,3$, толщиной $h = 0,002$ м с углами конусности $2\alpha_1 = 30^\circ$, $2\alpha_2 = 15^\circ$. Радиусы внутреннего и внешнего контуров соответственно равны $r_0 = 0,02$ м, $r_k = 0,5$ м. Для оценки точности полученных результатов были проведены расчеты конической оболочки на сжатие и внешнее давление при различных значениях $m = 30, 40, 50$ числа точек ортогонализации. Сопоставлялись полученные значения усилий с известным [4] аналитическим решением для безмоментного состояния:

$$N_s = - \frac{P \zeta}{\pi s \sin 2\alpha_1}; \quad N_\theta = 0 \quad - \text{для сжатия}$$

$$N_s = - \frac{1}{2} g_n \operatorname{stg} \alpha_1 \left(1 - \frac{s_0^2}{s^2} \right); \quad N_\theta = - g_n \operatorname{stg} \alpha_1 \quad - \text{для внешнего давления.}$$

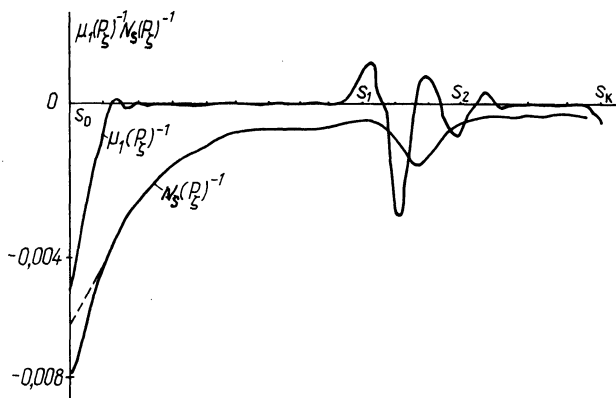


Рис. 2. Усилия и моменты в сжатой составной оболочке.

Получены небольшие расхождения в областях, прилежащих к контурам оболочки.

На рис. 2 приведены усилия и моменты (величины безразмерные) в составной оболочке, подверженной осевому сжатию $P_z = 1 \cdot 10^4$ Н. Пунктирная линия соответствует безмоментной теории конических оболочек. Как показали расчеты, при данном виде нагружения поверхности нулевой гауссовой кривизны последняя испытывает практически безмоментное напряженное состояние.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б и д е р м а н В.Л. Некоторые вычислительные методы решения задач строительной механики, приводимых к обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Машиностроение, 1976, вып. 17, с. 8–36.
2. Б и д е р м а н В.Л. Механика тонкостенных конструкций. — М.: Машиностроение, 1977. — 487 с.
3. Г о д у н о в С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — Успехи математических наук, 1961, т. 16, вып. 3, 99, с. 171–179.
4. Г р и г о л ю к Э.И., К а б а н о в В.В. Устойчивость оболочек. — М.: Наука, 1978. — 359 с.