УДК 532.5:532.135

Е.Н.ЛАМБИНА, канд. физ.-мат.наук (БПИ)

МЕДЛЕННЫЕ НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ И ВЯЗКОУПРУГОЙ МАКСВЕЛЛОВСКОЙ ЖИДКОСТЕЙ ПРИ ВЫДАВЛИВАНИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛАСТИНАМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Постановка задачи. Жидкость заключена в зазоре между параллельными пластинами произвольной формы (рис. 1). Течение возникает из состояния покоя вследствие сообщения одной из пластин импульсивного движения с постоянной скоростью v . Неподвижная пластина расположена в плоскости xoy; h – расстояние между пластинами. Требуется найти распределение скоростей и давление между пластинами. Нормальное давление p предполагается не зависящим от координаты z, т.е. $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$ (последнее соотношение является общепринятым в гидродинамической теории смазки). Течение рассматривается в пренебрежении массовыми силами и конвективными членами в выражениях для ускорений частиц жидкости.

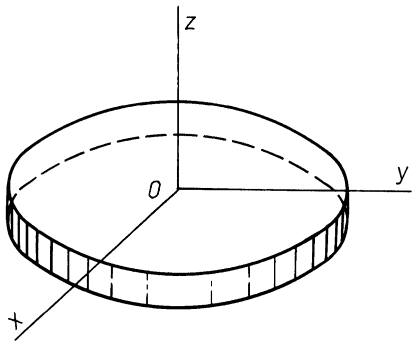

Рис. 1. Область течения жидкости.

Решение для вязкой несжимаемой жидкости. Выпишем основные соотношения задачи.

Уравнения движения :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right);$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \tag{1}$$

Граничные условия

$$v_x\big|_{z=0} = v_y\big|_{z=0} = v_z\big|_{z=0} = v_x\big|_{z=h} = v_y\big|_{z=h} = 0;\ v_z\big|_{z=h} = -v - \tag{2}$$

условия прилипания;

$p\big|_L = 0$ L – контур пластины.

Нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, что решение, удовлетворяющее условиям (1), (2), имеет вид:

$$\begin{cases} v_z = 2f\,; \\ v_x = \dfrac{\partial f}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial x} - x\right); \\ v_y = \dfrac{\partial f}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial y} - y\right); \\ p = \left(\psi - \dfrac{x^2+y^2}{2}\right)\Phi\,; \quad \Phi = \mu\dfrac{\partial^3 f}{\partial z^3} - \rho\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial t}\,, \end{cases} \tag{3}$$

где $\psi = \psi(x, y)$ – гармоническая функция, удовлетворяющая граничному условию

$$\psi|_L = \frac{x^2+y^2}{2}\Big|_L\,, \tag{4}$$

а функция $f = f(z, t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^4 f}{\partial z^4} - \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial t} = 0 \tag{5}$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} & f|_{z=0} = 0; && \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0; \\ & f|_{z=h} = -\frac{v}{2}\,; && \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{z=h} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $f(z, t)$ должна также удовлетворять начальному условию

$$f|_{t=0} = 0. \tag{7}$$

Решение уравнения Лапласа при граничном условии вида (4) соответствует некоторым другим физическим задачам и известно для ряда областей. Обзор методов решения этой задачи и рассмотрение многих частных случаев содержится в [1].

Уравнение (5) при условиях (6) и (7) решается методом интегрального преобразования Лапласа (решение приведено в [2]). В обозначениях настоящей статьи

$$f = -v\left[\frac{3}{2}\left(\frac{z}{h}\right)^2 - \left(\frac{z}{h}\right)^3\right] - \frac{v}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\xi_m^2}\left[1 - \frac{2z}{h} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin\xi_m\left(1 - \frac{2z}{h}\right)}{\sin\xi_m}\right]\exp\left(-\frac{4\mu\xi_m^2 t}{\rho h^2}\right);$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{3vz}{h^2}\left(1-\frac{z}{h}\right)+\frac{v}{h}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\xi_m - \cos\xi_m\left(1-\frac{2z}{h}\right)}{\xi_m \sin\xi_m}\,\mathrm{x}$$

$$\mathrm{x}\ \exp\left(-\frac{4\mu\xi_m^2 t}{\rho h^2}\right),$$

где ξ_m– положительные корни уравнения $\mathrm{tg}\xi = \xi$.
Определим также выражение

$$\Phi(z,t) = \mu\frac{\partial^3 f}{\partial z^3} - \rho\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial t}.$$

Тогда получим

$$\Phi(z,t) = \frac{\mu v}{h^3}\left[6 + 4\exp\left(-\frac{4\mu\xi_m^2 t}{\rho h^2}\right)\right].$$

Решение для вязко-упругой максвелловской жидкости. Для вязко-упругой несжимаемой жидкости, описываемой реологическим уравнением

$$S = 2\int_0^t \mu(t-\tau)\,\dot{\varepsilon}(\tau)d\tau.$$

Решение может быть получено при помощи принципа соответствия [3]. В случае $\mu = G\exp\left(-\frac{G}{\eta}t\right)$ (модель Максвелла) в формулах (3) функции f и Φ следует заменить функциями f_1 и Φ_1 соответственно, где

$$f_1 = -v\left[\frac{3}{2}\left(\frac{z}{h}\right)^2 - \left(\frac{z}{h}\right)^3\right] - \frac{v}{2}\exp\left(-\frac{G}{2\eta}t\right)\,\mathrm{x}$$

$$\mathrm{x}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\xi_m^2}\left[1-2\frac{z}{h}-\frac{\sin\left(1-\frac{2z}{h}\right)\xi_m}{\sin\xi_m}\right]\left(\cos\frac{G}{\eta}\alpha_m t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\alpha_m}\sin\frac{G}{\eta}\alpha_m t\right);$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = -\frac{3vz}{h^2}\left(1-\frac{z}{h}\right)+\frac{v}{h}\exp\left(-\frac{G}{2\eta}t\right)\mathrm{x}$$

$$\mathrm{x}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\xi_m - \cos\xi_m\left(1-\frac{2z}{h}\right)}{\xi_m\sin\xi_m}\left(\cos\frac{G}{\eta}\alpha_m t + \frac{1}{\alpha_m}\sin\frac{G}{\eta}\alpha_m t\right);$$

$$\Phi_1 = \frac{6v\eta}{h^3}\left[1-\exp\left(-\frac{G}{\eta}t\right)\right] + \frac{\rho v\eta}{h^3}\exp\left(-\frac{G}{2\eta}t\right)\mathrm{x}$$

$$\mathrm{x}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{G}{2\eta}\hat{\alpha}_m t}{\alpha_m}$$

Здесь

$$\alpha_m = \sqrt{\frac{16\eta^2\xi_m^2}{\rho h^2 G} - 1} \ .$$

В результате решения можно сделать следующие выводы. Медленные неустановившиеся течения вязкой и вязкоупругой максвелловской жидкостей при выдавливании параллельными пластинами произвольной формы определяются двумя функциями $f(z,t)$ и $\psi(x, y)$. Функция $f(z, t)$ зависит от реологических констант жидкости. Она определена как для вязкой, так и для вязкоупругой максвелловской среды. Для решения конкретных задач существенна независимость этой функции от формы пластин.

Функция $\psi(x, y)$ – гармоническая функция, не зависящая от реологических констант жидкости. Ее определение сводится к решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа при граничном условии определенного вида $\psi(x, y)$ зависит только от формы пластин. При рассмотрении некоторых частных случаев формы пластин могут быть использованы готовые решения этой задачи, известные для ряда областей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д и н н и к А.Н. Продольный изгиб и кручение. – М.: АН СССР, 1955. – 390 с. 2. Л а п у ш и н а Б.И. Течение вязкопластичной среды между сближающимися дисками при импульсном изменении скорости. – В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Выш. шк., 1980, вып. 7, с. 97–103. 3. Л а м б и н а Е.Н. О принципе соответствия для медленных неустановившихся течений вязко-упругих линейных жидкостей. – В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск, Выш. шк., 1980, вып. 7, с. 90–93.

УДК 539.3

С.Ф.АНДРЕЕВ, Г.Ф.ЕРШОВ,
д-р.техн.наук (БПИ)

К РАСЧЕТУ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Рассматривается осесимметричное напряженно-деформированное состояние тонкостенной оболочки вращения, геометрия которой не может быть описана единым аналитическим уравнением. Тонкостенная оболочка состоит из набора двух конических оболочек, сопряженных посредством оболочки вращения, линией контура которой является дуга окружности произвольного радиуса R (рис. 1).

В качестве граничных условий на внешнем крае оболочки принято

$$\xi_K = 0; \ \varphi_K = 0,$$

что соответствует жесткому защемлению контура. Здесь ξ_K – радиальное перемещение точек срединной поверхности; φ_K – угол поворота нормали к срединной поверхности.